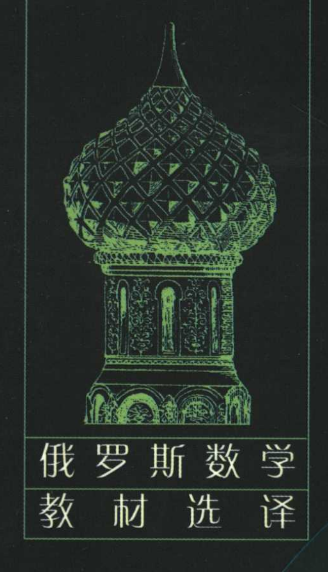


俄罗斯数学
教材选译

现代几何学：方法与应用（第三卷）

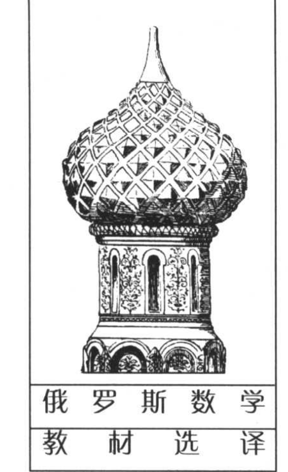
同调论引论

（第2版）

□ Б. А. 杜布洛文　С. П. 诺维可夫　А. Т. 福明柯　著
□ 胥鸣伟　译



高等教育出版社
Higher Education Press



● 数学天元基金资助项目

俄罗斯数学教材选译

现代几何学：方法与应用（第三卷）

同调论引论

（第2版）

□ Б. А. 杜布洛文　С. П. 诺维可夫　А. Т. 福明柯　著
□ 胥鸣伟　译



高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01 -2006 -3367 号

Современная геометрия：Том 3. Методы и приложения.
Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей.
УРСС, 2001.
Originally published in Russian under the title
Modern Geometry—Methods and Applications
Part 3：Introduction to Homology Theory

图书在版编目（CIP）数据

现代几何学：方法与应用．第三卷，同调论引论：第2版／（俄罗斯）杜布洛文，（俄罗斯）诺维可夫，（俄罗斯）福明柯著；胥鸣伟译．—北京：高等教育出版社，2007.4
ISBN 978 -7 -04 -021434 -5

Ⅰ.现… Ⅱ.①杜…②诺…③福…④胥… Ⅲ.几何学－高等学校－教材 Ⅳ.O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第024542号

策划编辑 郑轩辕 **责任编辑** 郑轩辕 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 朱 静
版式设计 马静如 **责任校对** 王 超 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×1092 1/16	版　次	2007年4月第1版
印　张	19.75	印　次	2007年4月第1次印刷
字　数	370 000	定　价	45.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 21434 - 00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有

适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

前　　言

人们在阐述拓扑学的原理时习惯上总把同调论置于最重要的地位. 自庞加莱奠定了拓扑学的基础以来, 同调论就一直被看成是代数拓扑方法的源头. 在这个习惯性的源头中, 只有基本群和覆叠空间来自同伦论. 实际上, 在所有经典的拓扑学方面的书籍中 (依本书的作者们看来, 其中最好的一本是沙爱福和施雷发的《拓扑学》(Seifert and Threlfall,《Topologie》)), 开始讲解的都是各种各样复形的同调理论. 只是在最近阶段才考虑了 (但仍然以同调论的视角) 纤维空间的理论和关于映射的一般性同伦分类问题 (即同伦论). 与此同时, 微分流形的方法从 20 世纪 30 年代便开始了令人感兴趣的发展 (惠特尼 (Whitney) 等人), 它重新建立了对现代拓扑学根基的诠释. 从这个新观点来看, 人们发现, 原来光滑流形的初等理论和基于它的同伦论*) 以及光滑的纤维空间的理论, 在本质上最接近于分析理论. 另外, 在 20 世纪 70 年代期间, 人们已清楚看到了恰恰是拓扑学的思想和方法的这种复杂性, 在现代物理学中的不同领域中有了很重要的应用. 出于这些原因, 作者们认为绝对必要学习的, 处在首位的拓扑内容应是光滑流形的理论、同伦论和纤维空间的理论. 这些内容已包含在杜布洛文, 诺维可夫和福明柯所著《现代几何学》的第 II 卷中. 在本卷中我们假定读者们已熟悉了这些内容.

另外, 拓扑学自身的更加复杂问题 (计算同伦群, 光滑流形的分类等等) 的求解, 还有在代数几何和复分析的问题中代数- 拓扑式方法的许多应用, 都要求同调论方法得到范围广泛的发展. 在现代拓扑学的文献中完全缺少那样的书籍, 使人们可以从中吸取到前面所提到的, 在拓扑学范围内应用的同调理论的复杂方法. 现在的这本书把弥补这个缺口当作它的部分目的.

*) 显然, 回溯到高斯、黎曼和庞加莱的最初的拓扑思想, 那也是出现在这个基础上的. 但在那时构建这样的拓扑学是不可能的. 庞加莱开启了单纯复形的同调理论, 为代数拓扑的基础提供了不同的精确构造.

在阐述同调论时, 作者们努力尽可能避免使用同调代数中的抽象语言, 以使读者一直记住同调、闭环和边缘是些具体的几何对象. 在某些场合, 譬如与谱序列有关的那一节, 那个自行加上的限制条件产生了某种难以消除的叙述中的缺陷, 但是现代同调代数的语言和方法的系统阐述, 正如经验所表明的, 会引出还要更糟糕的缺陷, 它制造了对同调论的几何意义理解的困难. 在本书中对现代拓扑学的某些基本方法 (谱序列和上同调方法) 虽然得到了叙述但并没有给出其正当性的证明. 要做到这点则要求实质性地扩充本书的容量. 我们应该记住, 这些方法的应用仅仅基于在所考虑对象内的形式代数性质, 而没有利用这些所论证对象自身结构的语言. 在书的结尾部分中, 代数拓扑被应用于研究示性类的整体性质和流形上的光滑结构. 作者力图使所给出的文献能引导读者去检索现代拓扑文献.

在完成本书中编辑 B. M. Бухштабер 做出了很大的贡献. 在他的指导下, 许多地方已完全重写, 同时也改进了许多证明. 作者们感谢他所做的大量工作.

目　　录

第一章

同调和上同调群. 它们的计算方法

§1. 作为闭微分形式类的上同调群. 它们的同伦不变性

同调群是流形的最重要的同伦不变量之一, 我们在本书 (即 [**1**]) 的第 Ⅱ 卷, §19, §24, §25 中已经使用过它了; 现在我们对它做一个系统的阐述.

对于同调群有好几种定义的方式. 我们首先考虑通过微分形式来作同调群的定义 (参看 [**1**], 卷 Ⅱ, §25).

我们考察在流形 M^n 上的 k 阶闭微分形式 (回想一下, 这里的指标 n 表示流形的维数), 它的局部形式为

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad d\omega = 0. \tag{1}$$

如果存在另一个 $k-1$ 阶微分形式 ω', 使得 $\omega = d\omega'$, 则称此微分形式 ω 为恰当的 (或者, 上同调于零的) (参看 [**1**], 卷 I, §25, 我们有 $d(d\omega')=0$, 即恰当形式是闭的).

定义 1[1] **上同调群** (线性空间)$H^k(M^n;\mathbb{R})$ 是指所有 k 阶闭微分形式对于其恰当形式子群的商群. 换句话说, $H^k(M^n;\mathbb{R})$ 是闭形式的等价类, 它在恰当形式的范围内被确定:

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad \text{表示} \quad \omega_1 - \omega_2 = d\omega'. \tag{2}$$

上同调群有下面的最简单的性质:

---

[1]在后面我们将遇到具各种系数的同调和上同调群的不同定义. 考虑到这些不同定义导出了相同的结论 (见下面 §§6, 14), 我们故意不引进表示其他各种定义的同调群的记号.

命题 1 对任意流形 M^n, 群 $H^0(M^n,\mathbb{R})$ 为 q 维线性空间, 其中 q 为此流形的连通分支的个数.

证明 零阶形式即是流形上的数值函数 $f(x)$. 如果零阶形式为闭, 则 $df(x) = 0$. 这表明函数 $f(x)$ 是局部常值的, 即在流形的每个连通分支上为常数. 零阶的闭形式不过是由 q 个常数构成的组, q 为分支数. 因为在这种情形下不存在恰当形式, 故命题得证. □

如果存在流形间的光滑映射 $f: M_1 \to M_2$, 则确定了形式间的映射 $\omega \longmapsto f^*(\omega)$, 使得 $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ ([1], 卷 I, §25). 因此定义了上同调群之间的映射

$$f^*: H^k(M_2;\mathbb{R}) \to H^k(M_1;\mathbb{R}), \tag{3}$$

这是因为等价类由 M_2 上的变到 M_1 上的等价类 (在 f^* 映射下, 闭形式变到闭形式, 恰当形式变到恰当形式). 映射 f^* 是上同调群之间的同态映射.

有下面的定理.

定理 1 如果有两个光滑映射

$$f_1: M_1 \to M_2 \quad 和 \quad f_2: M_1 \to M_2,$$

它们同伦, 则上同调群的映射 f_1^* 和 f_2^* 相等:

$$f_1^* = f_2^*: H^k(M_2;\mathbb{R}) \to H^k(M_1;\mathbb{R}).$$

证明 设已给出了光滑的同伦映射 $F: M_1 \times I \to M_2$, 其中 I 为线段 $1 \leqslant I \leqslant 2$, $F(x,1) = f_1(x)$, $F(x,2) = f_2(x)$. 在 $M_1 \times I$ 上的任意 k 阶微分形式 Ω 具有的形状为

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt, \quad \Omega|_{t=t_0} = \omega_1(t_0), \tag{4}$$

其中 ω_1 为 k 阶形式, 它的微分中不含 dt, 而 ω_2 为 $k-1$ 阶形式, 也不含微分 dt (在 $M_1 \times I$ 中选取的局部坐标常记为 $(x^1,\cdots,x^n,t) \equiv (x,t)$, 其中 $(x^1,\cdots,x^n)$ 为 M_1 的局部坐标). 设 ω 为 M_2 上的任意的 k 阶形式. 于是形式 $F^*(\omega) = \Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, 其中局部地我们可记

$$\omega_2 = \sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}} a_{i_1\cdots i_{k-1}}(x,t)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

$$\omega_1 = \sum_{j_1<\cdots<j_k} b_{j_1\cdots j_k}(x,t)dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}.$$

我们在流形 $M_1 \times I$ 上局部地定义一个 $k-1$ 阶的形式 $D\Omega$ 为

$$D\Omega = \sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}} \left(\int_1^2 a_{i_1\cdots i_{k-1}}(x,t)dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}$$
$$= \int_1^2 \omega_2 dt. \tag{5}$$

我们有下面的重要引理.

引理 1 成立 "代数同伦" 的公式 (见 §2):

$$d(D(F^*(\omega))) \pm D(d(F^*(\omega))) = f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega). \tag{6}$$

证明 我们要证明, 对 $M_1 \times I$ 上任意的形式 Ω 成立等式

$$dD(\Omega) \pm D(d\Omega) = \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}. \tag{7}$$

设 $\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, 我们来计算 $dD(\Omega)$. 由定义, 局部地有

$$dD(\Omega) = \sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}} \sum_j \left(\int_1^2 \frac{\partial a_{i_1\cdots i_{k-1}}}{\partial x^j} dt\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

$$Dd(\Omega) = D(d\omega_1) + D(d\omega_2 \wedge dt)$$
$$= D\left(\sum_{j_1<\cdots<j_k} \sum_q \frac{\partial b_{j_1\cdots j_k}}{\partial x^q} dx^q \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge x^{j_k}\right.$$
$$\left. + \sum_{j_1<\cdots<j_k} \frac{\partial b_{j_1\cdots j_k}}{\partial t} dt \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\right)$$
$$+ D\left(\sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}} \sum_p \frac{\partial a_{i_1\cdots i_{k-1}}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dt\right).$$

由此我们得到

$$dD\Omega + (-1)^{k+1} Dd\Omega = \pm \sum_{j_1<\cdots<j_k} (b_{j_1\cdots j_k}(x,2) - b_{j_1\cdots j_k}(x,1))\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$
$$= \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}.$$

等式 (7) 得证. 现在如果 $\Omega = F^*(\omega)$, 则 $\Omega|_{t=2} = f_2^*(\omega), \Omega|_{t=1} = f_1^*(\omega)$. 引理证完. □

回到定理的证明. 设在 M_2 上给出了闭形式 ω (即 $d\omega = 0$). 于是有等式

$$f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega) \pm DdF^*(\omega).$$

但是 $dF^*(\omega) = F^*(d\omega) = 0$. 因此我们有 $f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega)$, 即两个形式的差为恰当形式. 这由定义表明, 同态

$$f_1^* : H^k(M_2;\mathbb{R}) \to H^k(M_1;\mathbb{R}) \quad \text{和} \quad f_2^* : H^k(M_2;\mathbb{R}) \to H^k(M_1;\mathbb{R})$$

在 (上同调的) 等价类上重合. 定理得证. □

回忆 [1], 第 Ⅱ 卷 §17 中, 称两个流形为同伦等价是说, 如果存在那样的光滑映射 $f : M_1 \to M_2, g : M_2 \to M_1$, 使得两个复合映射 $fg : M_2 \to M_2$ 和 $gf : M_1 \to M_1$ 各自同伦于恒同映射

$$M_1 \to M_1(x \mapsto x), M_2 \to M_2(y \mapsto y).$$

例如, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (或者圆盘 $D^n = \left\{\sum_{\alpha=1}^{n}(x^\alpha)^2 \leqslant R^2\right\}$) 同伦等价于一个点. 其证明用了 $\mathbb{R}^n$ (或 D^n) 在其内形变为一个点的事实. 确切地这表明, 恒同映射 $1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x \mapsto x)$ 同伦于常值映射 $\mathbb{R}^n \to 0$ (映到一个点).

定理 2 同伦等价的流形具有相同的上同调群.

证明 设映射 $f : M_1 \to M_2, g : M_2 \to M_1$ 给出了同伦等价性. 考虑映射 $f^* : H^k(M_2) \to H^k(M_1)$ 和 $g^* : H^k(M_1) \to H^k(M_2)$. 因为映射 fg 和 gf 同伦于恒同映射, 故而由定理 1 知, 同态 $(fg)^* = g^*f^*$ 和 $(gf)^* = f^*g^*$ 正是上同调群的恒同同态:

$$1 = g^*f^* : H^k(M_2) \to H^k(M_2), 1 = f^*g^* : H^k(M_1) \to H^k(M_1).$$

由此, 同态 f^* 和 g^* 为同构, 且它们互逆: $f^* = (g^*)^{-1}$. 定理得证. □

注 根据所证明的这个定理, 对于所有那种空间 X, 如果能找到一个流形 $M \supset X$ 使得 X 是 M 的收缩, 则只要令

$$H^k(X;\mathbb{R}) \equiv H^k(M^n;\mathbb{R}), \tag{8}$$

便能定义其上同调群.

例如, 8 字形曲线并不是流形, 但对它可以定义其上同调群, 即按定义, 它是区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1 \cup Q_2\}$ 的上同调群 (参看图 1).

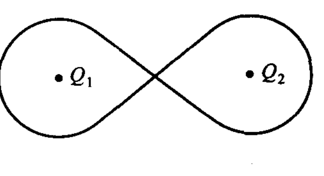


图 1

推论 1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 或圆盘 D^n 的上同调群与一个点的上同调群相等, 即当 $k > 0, H^k(\mathbb{R}^n)$ 为零, 而 $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, 即一维线性空间.

由此得到所谓的 "庞加莱引理": 局部地, 在流形 M^n 的任意点附近的区域中, 所有闭形式 ω (对其有 $d\omega = 0$) 都是恰当的: $\omega = d\omega', \deg\omega > 0$. 事实上, 选

取在点 Q 为中心的局部坐标中的圆盘 $D^n: \left\{\sum_{\alpha=1}^{n}(x^\alpha - x_0^\alpha)^2 \leqslant \varepsilon\right\}$, 并对此圆盘应用推论 1 得到, 当 $k > 0$ 时 $H^k(D^n) = 0$.

对于 $k = 1$ 的庞加莱引理已在分析课程中有所讲述. 对 1- 形式 $\omega = f_k dx^k, d\omega = 0$, 我们有 $\omega = dF$, 其中 $F(P) = \int_Q^P f_k dx^k$, 其中的积分路径为在圆盘内从点 Q 到点 P.

现在我们来计算圆 S^1 的上同调.

命题 2 圆 S^1 的上同调群为

$$H^k(S^1;\mathbb{R}) = 0, k > 1; H^1(S^1;\mathbb{R}) = \mathbb{R},$$
$$H^0(S^1;\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \tag{9}$$

证明 显然, 如果 $k > 1$, 则 S^1 的上同调群平凡 (即等于 0). 另外, 因为圆为连通, 故 $H^0(S^1) = \mathbb{R}$. 为计算群 $H^1(S^1)$, 我们引进坐标 φ, 其中 φ 与 $\varphi + 2\pi n$ 对任意整数 n 代表圆周的同一个点. 一阶形式可写为 $\omega = a(\varphi)d\varphi$ 的形状, 其中 $a(\varphi)$ 为满足 $a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi)$ 的周期函数. 因为圆的维数等于 1, 故总有 $d\omega = 0$. 如果 $a(\varphi)d\varphi = dF$, 其中 $F(\varphi)$ 为周期函数, 则形式 $a(\varphi)d\varphi$ 是恰当的. 显然, $F(\varphi) = \int_0^\varphi a(\psi)d\psi +$ 常数. 因此, 函数 $F(\varphi)$ 为周期函数当且仅当满足条件 $\int_0^{2\pi} a(\psi)d\psi = 0$ 或 $\int_{S^1}\omega = 0$.

因此, 圆周上的 1- 形式 $\omega = a(\varphi)d\varphi$ 是恰当的当且仅当满足条件 $\int_{S^1}\omega = 0$. 所以两个形式 $\omega_1 = a(\varphi)d\varphi$ 和 $\omega_2 = b(\varphi)d\varphi$ 定义同一个上同调类的充要条件为 $\int_{S^1}\omega_1 = \int_{S^1}\omega_2$. 所以我们得到 $H^1(S^1;\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. 命题得证. □

推论 去掉一个点的欧氏平面 $\mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}$ (或圆环) 的上同调群与圆的上同调群相同:

$$H^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}) = 0, k > 1;$$
$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}) = \mathbb{R}. \tag{10}$$

注 我们再指出计算圆的上同调的一个方法. 我们对每个形式 $\omega(\varphi) = a(\varphi)d\varphi$ 给出相应的 "平均" 形式

$$\widehat{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\varphi+\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}a(\varphi+\tau)d\tau\right]d\varphi.$$

命题 3 形式 ω 上同调等价于 $\widehat{\omega}$.

证明 圆周 S^1 到自己的变换 $\varphi \mapsto \varphi + \tau$ 诱导出了形式 $\omega(\varphi+\tau)$. 这个映射同伦于恒同映射. 故而 $\omega(\varphi) \sim \omega(\varphi+\tau)$. 对于 $\widehat{\omega}$ 的积分和的形状为

$$\frac{1}{2\pi}\sum_i \omega(\varphi+\tau_i)\Delta\tau_i \sim \omega(\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}\sum_i \Delta\tau_i = \omega(\varphi). \tag{11}$$

任意这样的积分和从而上同调于 ω. 引理得证. □

形式 $\widehat{\omega}$ 可写为

$$\widehat{\omega}(\varphi)=\alpha d\varphi,\ \text{其中}\ \alpha=\ \text{常数}\ =\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a(\psi)d\psi.$$

事实上:

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}(\varphi)&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}a(\varphi+\tau)d\tau\right]d\varphi=\frac{1}{2\pi}\left[\int_\varphi^{2\pi+\varphi}a(\psi)d\psi\right]d\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}a(\psi)d\psi\right]d\varphi.\end{aligned}$$

(可以说, 形式 $\widehat{\omega}(\varphi)$ 对于旋转不变: $\widehat{\omega}(\varphi+\varphi_0)=\widehat{\omega}(\varphi)$.)

因此, 我们对每个上同调类 ω 给出对应的 (对于旋转) 不变形式 $\widehat{\omega}$, 即一个实数. 显然, 这个对应是相互一一的, 从而得到 $H^1(S^1)=\mathbb{R}$.

在下面, 我们在计算紧的齐性空间的上同调时将推广上述的讨论.

命题 4 定向闭黎曼流形 M^n 的上同调群 $H^n(M^n)$ 是非平凡的.

证明 考虑体积元 Ω, 局部地我们有 $\Omega=\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. 如果区域所选的局部坐标组与定向相容 (即所有转移函数的雅可比为正), 则 Ω 是 n 阶微分形式, 满足 $\int_{M^n}\Omega>0$ (这是流形 M^n 的体积). 显然, 因为形式 Ω 的阶等于 n, 有 $d\Omega=0$. 如果假设 $\Omega=d\omega$, 那么应用斯托克斯定理我们得到了

$$\int_{\partial M^n}\omega=\int_{M^n}d\omega=\int_{M^n}\Omega=0 \tag{12}$$

(因为 M^n 为闭且无边缘). 导出了矛盾. 命题得证. □

注 如果闭流形 M^n 是非定向的 (例如, $M^2=\mathbb{R}P^2$), 则群 $H^n(M^n;\mathbb{R})$ 平凡; 我们将在 §3 中证明它. 特别, 在具负雅可比的变换下, 体积元 $\Omega=\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 的行为并不像微分形式那样.

设 $H^*(M^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}H^k(M^n)$ 为上同调群的直和. 我们要在群 $H^*(M^n)$ 中引进环结构.

命题 5 设 ω_1,ω_2 为闭形式. 于是形式 $\omega_1\wedge\omega_2$ 和 $(\omega_1+d\omega')\wedge\omega_2$ 都为闭形式, 并且上同调等价.

证明 根据莱布尼兹公式 (参看 [1], 第 I 卷, §25) 我们有

$$d(\omega'\wedge\omega_2)=d\omega'\wedge\omega_2\pm\omega'\wedge d\omega_2=d\omega'\wedge\omega_2. \tag{13}$$

因此

$$(\omega_1 + d\omega') \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + d(\omega' \wedge \omega_2). \tag{14}$$

命题得证. □

根据这个命题, 形式的外积在 $H^*(M^n)$ 中给出了一个合理的乘法. 因此, 我们得到了流形 M^n 的上同调环. 如果 $\omega_1 \in H^p(M^n), \omega_2 \in H^q(M^n)$, 则积 $\omega_1\omega_2$ 在空间 $H^{p+q}(M^n)$ 中. 这个乘法具有下面的反交换性质:

$$\omega_2\omega_1 = (-1)^{pq}\omega_1\omega_2. \tag{15}$$

我们来解释同调群的几何意义 (准确的定义可参看后面的章节).

如果 M^n 为任意的流形, ω 为 k 阶闭形式, 则可定义它 "在闭链上的积分". 譬如, 可如下进行: 设 M^k 为闭的 k 维定向流形. 在此, 我们所说流形 M^n 中的 "闭链" 的意思是一个光滑映射 $f: M^k \to M^n$, 即偶对 (M^k, f).

定义 2 称积分 $\int_{M^k} f^*\omega$ 为形式 ω 在闭链 (M^k, f) 上的周期.

设 N^{k+1} 为任意一个定向流形, 其边缘为 $\partial N^{k+1} = M^k$. 边缘是个闭的定向流形 (有可能由几块组成). 我们所说的 "膜片" 是指映射 $F: N^{k+1} \to M^n$. 有下面的定理.

定理 3 a) 对任意闭链 (M^k, f), 恰当形式 $\omega = d\omega'$ 的周期等于 0.

b) 如果闭链 (M^k, f) 是膜片 (N^{k+1}, F) 的边缘, 即其中 M^k 为 N^{k+1} 的边缘, 而 $F|_{M^k} = f$, 则任意闭形式在这样的闭链 (M^k, f) 上的周期等于 0.

证明 a) 如果 $\omega = d\omega'$, 于是按斯托克斯公式我们有

$$\int_{M^k} f^*\omega = \int_{M^k} f^*(d\omega') = \int_{M^k} d(f^*\omega') = \int_{\partial M^k} f^*(\omega') = 0, \tag{16}$$

这是因为流形 M^k 没有边缘.

b) 如果 M^k 是 N^{k+1} 的边缘 (考虑其定向), 并且 $F|_{M^k} = f$, 则由斯托克斯公式有

$$\int_{M^k} f^*\omega = \int_{N^{k+1}} dF^*(\omega) = \int_{N^{k+1}} F^*(d\omega) = 0. \tag{17}$$

定理得证. □

我们不加证明地引进下面重要的命题.

命题 如果一个闭形式对所有闭链的周期均为零, 则此形式为恰当的 (参看 §14).

例 如果 $M^n = S^n$ 为球面, 则当 $k \neq 0, n$ 时 $H^k(S^n) = 0$.

证明　如果 $k > n$, 则由定义此命题显然成立. 如果 $0 < k < n$, 且 (M^k, f) 为任一闭链, 则由萨尔德 (Sard) 定理 ([1], 卷 Ⅱ, §10), 像 $f(M^k)$ 之外至少有一个点 $Q \in S^n$. 因此闭链 (M^k, f) 实际位于 $\mathbb{R}^n = S^n \setminus \{Q\}$ 中. 我们已经知道 (庞加莱引理), $\mathbb{R}^n$ 中的任一个闭形式都是恰当的. 故而当 $0 < k < n$ 时所有的周期都为零. 最终有, 当 $0 < k < n, H^k(S^n) = 0$. □

可以用类似于计算圆 S^1 的上同调的讨论 (见前面) 得到这个例子的另一个推导. 利用球面 S^n 上的运动群 $SO(n+1)$, 可以把任意一个上同调类化为球面 S^n 上对于 $SO(n+1)$ 不变的闭形式. 不变形式 ω 自身由其在球面的一个点上值所确定, 同时在此点, 这个形式应该对于稳定群 $SO(n) \subset SO(n+1)$ 不变. 这样的形式 ω 除了在维数为 0 和 n 外并不存在 (请验证!).

以类似的方法, 我们可以计算李群和对称空间的上同调群.

回忆 [1], 卷 Ⅱ, §6, 称具迷向群 H 的群 G 的齐性空间 M 为对称的是说, 如果在群 G 中给出了一个 "对合", 即一个自同构 $I: G \to G, I^2 = I$, 使得 $I|_H = 1$ (子群 H 中的点对于自同构 I 不变), 并且这时方程 $I(x) = x$ 对于靠近单位元的解 x 给出的只是子群 H 中的元素.

在这样的齐性流形 M 上, 对应于每个点 x 定义了一个 "对称" s_x, 使 $s_x^2 = 1$. 流形 M 到自身的映射 s_x 是这样的: 设 $g(x)$ 为 M 中的任意点; 我们令

$$g(x) \mapsto s_x(g(x)) = I(g)(x); \quad s_x(x) = x \ (\text{当 } g = 1); \tag{18}$$

其中 g 为 M 上的作用群 G 中任意元.

对每个点 x, 映射 s_x 有确定的定义, 同时 $(s_x)_*$ 是在点 x 的切空间上关于坐标原点的反射 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §6). 特别, 每个紧李群 G 是群 $G \times G$ 的对称空间. 群 $G \times G$ 的作用定义为

$$T_{(g,h)}(x) = gxh^{-1}. \tag{19}$$

对合 I 为 $I(g,h) = (h,g)$. 迷向子群 H 为对角线 $\{(g,g)\}$. 对于群 G 的单位元 $x = e$ 的对称 s_x 为

$$s_e(g) = g^{-1}. \tag{19'}$$

在任意一个齐性空间上有一些特殊的不变微分形式, 使得 $g^*\omega = \omega, g$ 为 G 中任意的元素.

不变形式的微分 $d\omega$ 仍然是不变形式:

$$g^* d\omega = dg^*\omega = d\omega. \tag{20}$$

两个不变形式的积 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 也是不变的:

$$g^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = g^*\omega_1 \wedge g^*\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2. \tag{21}$$

因此, 在齐性空间 M 上定义了不变形式的环. 这表明, 对于任意的紧连通李群的齐性空间, 其上同调环可以借助于不变形式来进行计算. 对于齐性的对称空间成立更强的命题:

定理 4 设 M 为紧连通李群 G 的紧对称空间. 我们有:

a) M 上任意不变形式为闭;

b) M 上任意的闭形式上同调 (等价) 于一个不变形式;

c) 非零的任意不变形式的上同调类不等于零.

证明 a) 设 ω 为 k 阶不变形式. 考虑形式 $s_x^*\omega = \widehat{\omega}$. 我们来证明形式 $\widehat{\omega}$ 也为不变. 由等式 (18) 有

$$s_x T_g = T_{Ig} s_x \quad (T_g \leftrightarrow g). \tag{22}$$

事实上, 如果 $y = T_h(x)$, 则

$$T_{Ig} s_x T_h(x) = T_{Ig} T_{Ih}(x) = T_{I(gh)}(x),$$

以及

$$s_x T_g T_h(x) = s_x T_{gh}(x),$$
$$s_x T_{gh}(x) = T_{I(gh)}(x) \leftrightarrow s_x T_g(y) = T_{Ig} s_x(y).$$

于是

$$T_g^* \widehat{\omega} = T_g^* s_x^* \omega = (s_x T_g)^* \omega = s_x^* T_{Ig}^* \omega = \widehat{\omega},$$

即 $\widehat{\omega}$ 为不变形式.

因为 s_x 定义了在点 x 的切空间上的反射, 故有 $\widehat{\omega}|_x = (-1)^k \omega|_x$.

又因为 ω 和 $\widehat{\omega}$ 都是不变的, 从而上面的等式对于任意点 x 都成立, 即

$$\widehat{\omega} = (-1)^k \omega. \tag{23}$$

所以, $d\widehat{\omega} = (-1)^k d\omega$. 然而 $k+1$ 阶形式 $d\widehat{\omega}$ 和 $d\omega$ 也为不变, 因而 $s_x^* d\omega = d\widehat{\omega}$. 按上面一样的论证 (这时这些形式的阶为 $k+1$) 我们便有

$$d\widehat{\omega} = (-1)^{k+1} d\omega. \tag{24}$$

就是说 $d\omega = 0$. 定理的第一部分得证.

b) 设流形 M 上的形式 ω 为闭: $d\omega = 0$. 由紧性, 在群 G 上存在不变度量 (基灵 (Killing) 度量) (参看 [1], 卷 I, §24 和卷 II, §8). 这个度量定义了不变体积元, 我们以 $d\mu(g)$ 表示它:

$$d\mu(hg) = d\mu(g). \tag{25}$$

法化这个群 G 上的体积元, 使得整个群的体积为 1:

$$\int_G d\mu(g) = 1. \tag{26}$$

我们由形式 ω 定义形式 $\tilde{\omega}$ 为

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega d\mu(g). \tag{27}$$

我们来验证形式 $\tilde{\omega}$ 为不变, 并且上同调于形式 ω. 计算形式 $T_h^*\tilde{\omega}$, 得到

$$\begin{aligned} T_h^*\tilde{\omega} &= \int_G T_{hg}^* \omega d\mu(g) = \int_G T_{hg}^* \omega d\mu(hg) \\ &= \int_G T_{g'}^* \omega d\mu(g') = \tilde{\omega}, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $g' = hg$ (这个变量变换是光滑且可逆的).

因此, 形式 $\tilde{\omega}$ 为不变的. 我们再来证明 $\tilde{\omega}$ 与 ω 为上同调等价. 流形 M 到自己的映射 T_g 同伦于恒同映射. 事实上, 设 $g(t)$ 为群 G 中的一条连接点 g 和群的单位元的曲线 (我们已知群 G 是连通的). 于是 $T_{g(t)}$ 是所求的同伦. 那么由定理 1 知, 形式 $T_g^*\omega$ 与 ω 上同调等价: $T_g^*\omega \sim \omega$. 因此,

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega d\mu(g) \sim \int_G \omega d\mu(g) = \omega \int_G d\mu(g) = \omega. \tag{29}$$

定理的第二部分得证.

c) 现在证明, 在紧对称空间上的不变形式不可能上同调于零 (假定此形式不为零). 我们应该记得, 在流形 M 上可以引进对于运动群 G 不变的黎曼度量 (h_{ij}) (参看 [1], 卷 II, §8). 流形上的黎曼度量定义了此流形上微分形式间的内积. 形式 ω 的自身内积为

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_M \omega \wedge *\omega. \tag{30}$$

当 $\omega \neq 0$ 时这个量总大于零. 事实上, 如果

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

则

$$\int \omega \wedge *\omega = \int h^{i_1 j_1} \cdots h^{i_k j_k} a_{i_1 \cdots i_k} a_{j_1 \cdots j_k} \sqrt{h} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n > 0$$

(其中 (h^{ij}) 是 (h_{ij}) 的逆矩阵, $h = \det(h_{ij}), n = \dim M$).

设 ω 为一个不变形式. 由于度量 (h_{ij}) 的不变性, 所有算子 T_g^* 与算子 $*$ 交换. 因此形式 $*\omega$ 也为不变, 从而为闭: $d * \omega = 0$.

我们假设 $\omega = d\omega'$. 于是 $d(\omega' \wedge *\omega) = d\omega' \wedge *\omega \pm \omega' \wedge d*\omega = \omega \wedge *\omega$. 由斯托克斯公式我们得到

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_M \omega \wedge *\omega = \int_M d(\omega' \wedge *\omega) = 0. \tag{31}$$

就是说, 形式 ω 恒为零. 定理得证. □

现在考察例题.

例 1 环面 $T^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$, 其中 Γ 是 n 个线性无关向量生成的整系数格. 环面是紧阿贝尔李群.

设 $x^1, \cdots, x^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的欧氏坐标. 所有形如 $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 的形式是 $\mathbb{R}^n$ 上相对于平移群的不变形式. 所以它们也定义了环面 T^n 上的不变形式. 如果形式 $\omega = a_{i_1 \cdots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 在环面上不变, 就是说,

$$a_{i_1 \cdots i_k}(x + y) = a_{i_1 \cdots i_k}(x), \tag{32}$$

即形式 ω 的系数为常数:

$$a_{i_1 \cdots i_k} = \text{常数}. \tag{33}$$

因此, T^n 上的任意不变形式是 $dx^1, \cdots, dx^n$ 的外积的常系数线性组合.

结论 *环面的上同调环 $H^*(T^n)$ 为一阶元素 $e_1, \cdots, e_n$ 构成的外代数 $\Lambda(e_1, \cdots, e_n)$. 这里的 e_i 就是形式 dx^i 的上同调类.*

例 2 紧李群 G 的不变形式为群上的双不变微分形式 (相对于左和右平移).

先考虑 G 上的左不变形式. 例如取值于群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的左不变向量值 1- 形式: $\omega(g) = g^{-1}dg$. 对于矩阵群 G, 其中 $g = (g_{ik}), dg = (dg_{ik})$ 是分量为 dg_{ik} 的矩阵, ω 也是由 1- 形式组成的矩阵 $\omega = (\omega_{ik})$.

对上面同一个 ω 有另一种构造方法, 这时不再利用群的矩阵表示, 因而对任意的群 G 都适用. 设 ξ 为群 G 在其一个点 g 上的一个切向量. 对 ξ 进行左平移 $(L_{g^{-1}})_*$ 后, 我们得到群单位元上的一个切向量, 即李代数 $\mathfrak{g}$ 中的一个元.

形式 ω 的每个分量都是左不变的:

$$\omega(hg) = g^{-1}h^{-1}d(hg) = g^{-1}dg = \omega(g). \tag{34}$$

设 $\theta^1, \cdots, \theta^N$ 为左不变 1- 形式空间中的基. 对于矩阵群而言, 作为微分形式, θ^i 可取为 $\omega = (\omega_{ik}) = g^{-1}dg$ 的分量中的线性无关组. 例如, 对于群 $G = SO(n)$, 这时矩阵 (ω_{ik}) 为反称, 可以取形式 $\omega_{ik}, i < k$ 为基.

引理 2 左不变 1- 形式的空间的维数等于这个群的维数.

证明 任意一个左不变 1- 形式 θ 完全由它自己在群的单位元上切空间所取的值决定, 而每个值又可以被一个左不变 1- 形式取得. 引理得证. □

推论 左不变 1- 形式的空间等同于群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的所有线性函数的空间 $\mathfrak{g}^*$.

在这里, 李代数被看成为群单位元上的切空间.

引理 3 任意左不变 k- 形式 ω 有形式

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}, \tag{35}$$

其中 $a_{i_1 \cdots i_k}$ 为常数.

证明 由引理 2, 在群的单位元上形式 ω 的形式为

$$\omega(e) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} \theta^{i_1}(e) \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}(e). \tag{36}$$

根据形式 ω 和 θ^i 的左不变性, 等式 (36) 在群的任意点均成立. 引理得证. □

推论 李群 G 上左不变形式的代数同构于外代数 $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$, 其中 $\mathfrak{g}^*$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 上线性函数的空间. 换句话说, 这个代数同构于李代数 $\mathfrak{g}$ 上的反称多重线性空间的代数.

我们要弄清楚, 在左不变形式中哪一些也是右不变的. 我们注意到, 对形式 $\omega = g^{-1}dg$ 进行右平移 h^{-1} 时, 它以下面的样子进行变化:

$$\omega \longmapsto (gh^{-1})^{-1}d(gh^{-1}) = h\omega h^{-1}.$$

于是我们有

引理 4 $\Lambda\mathfrak{g}^*$ 中的反称多重线性函数 $\varphi(X_1, \cdots, X_k)$ 对应一个右不变形式当且仅当它满足等式

$$\varphi(hX_1h^{-1}, \cdots, hX_kh^{-1}) = \varphi(X_1, \cdots, X_k), \tag{37}$$

其中 h 为群 G 中任意的元素.

结论 连通紧李群 G 的上同调环同构于环 $\Lambda_{\text{inv}}(g^*)$, 它由李代数 $\mathfrak{g}$ 上的反称多重线性函数中对于内自同构的不变元构成.

设 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的基灵形式. 我们定义李代数 $\mathfrak{g}$ 上一个三元线性函数 $\Omega(X, Y, Z)$, 其中

$$\Omega(X, Y, Z) = \langle [X, Y], Z \rangle. \tag{38}$$

由于基灵形式的不变性 (参看 [1], 第 I 卷, §24), 形式 Ω 是反称的. 此外, 由等式 $[hXh^{-1}, hYh^{-1}] = h[X,Y]h^{-1}$ 又知 Ω 对于群 G 的内自同构不变. 故而我们有

命题 6 设紧李群 G 具有非退化基灵形式 (即非阿贝尔群), 则群 $H^3(G)$ 非零.

例 3 设 M 为群 G 的对称空间, H 为其迷向群. 固定流形 M 中一个点 x, 我们得到了映射 $G \xrightarrow{p} M$, 它把群中元素 g 变为 $p(g) = T_g(x)$. 整个子群 H 在 p 下 (只有这个子群) 变成了点 x. 如果 ω 是流形 M 上的一个形式, 则在群 G 上定义了一个形式 $p^*\omega$. 这个形式在子群 H 的切空间上化为零. 子群 H 的任一个左陪集 $\{gH\}$ 在 p 下变成一个点. 故而形式 $p^*\omega$ 在群 H 中元素的右平移下保持不变.

设 ω 为流形 M 上的一个不变形式. 于是形式 $p^*\omega$ 便是群 G 上的左不变形式.

定理 5 设 M 为群 G 的齐性空间, H 为其迷向群. 于是在 M 上的不变微分形式的环同构于外代数 $\Lambda_{\mathrm{inv}}((\mathfrak{g}/h)^*)$ (其中 h 为子群 H 的李代数), 即 $\mathfrak{g}$ 上的那些反称多重线性函数构成的代数, 这些多重线性函数在 h 上为零, 并对 H 中元素对应的内自同构不变.

证明 我们对 M 上每个不变形式 ω 有一个相应的群 G 上形式 $p^*\omega$. 由于形式 $p^*\omega$ 为左不变, 并在 h 上化为零, 故而定义了 $\Lambda((\mathfrak{g}/h)^*)$ 中的一个元素. 形式 $p^*\omega$ 另外又对于群 H 中元的右平移不变. 由于这样的左不变性, 这就足以得到形式 $p^*\omega$ 对于群 H 中元的内自同构不变性. 定理证完. □

例 4 计算复射影空间

$$\mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(1) \times U(n) \tag{39}$$

的上同调环. $\mathbb{C}P^n$ 是紧对称空间. 群 $U(n+1)$ 为连通和紧的. 因此 $\mathbb{C}P^n$ 的上同调环可通过不变微分形式定义.

设 $(z^0, \cdots, z^n)$ 为 $\mathbb{C}P^n$ 的齐次坐标, 即 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上的坐标, 差一个非零复因子被确定. 考虑在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个实微分 2- 形式

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_k dz^k \wedge d\bar{z}^k. \tag{40}$$

我们仍以 Ω 表示上面这个形式在球面 $S^{2n+1} : \sum_{k=0}^{n} |z^k|^2 = 1$ 上的限制. 形式 Ω 对于群 $U(n+1)$ 不变. 我们来证明这个形式可以由 $\mathbb{C}P^n$ 上的一个形式 ω 得到: $\Omega = p^*\omega$, 其中 $p : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ 为自然投射.

必须验证在变换

$$z^k \mapsto e^{i\varphi} z^k, \quad dz^k \to e^{i\varphi}(dz^k + iz^k d\varphi) \tag{41}$$

$$\bar{z}^k \to e^{-i\varphi}\bar{z}^k, \quad d\bar{z}^k \to e^{-i\varphi}(d\bar{z}^k - i\bar{z}^k d\varphi) \tag{41'}$$

下, 形式 Ω 变到自己.

在球面 $S^{2n+1}: \sum\limits_{k=0}^{n} z^k\bar{z}^k = 1$ 上, 我们有 $\sum z^k d\bar{z}^k + \sum \bar{z}^k dz^k = 0$; 故而

$$\frac{i}{2}\Sigma dz^k \wedge d\bar{z}^k \to \frac{i}{2}\Sigma dz^k \wedge d\bar{z}^k + id\varphi \wedge \Sigma(z^k d\bar{z}^k + \bar{z}^k dz^k) = \frac{i}{2}\Sigma dz^k \wedge d\bar{z}^k.$$

因此, 我们得到了对称空间 $\mathbb{C}P^n$ 上的一个不变 2- 形式 ω. 由于对 $k \leqslant n$, Ω 的外幂 Ω^k 非零 (请验证!), 则相应的幂 ω^k 也非零.

结论 复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 的上同调代数 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 包含了多项式代数 $\mathbb{C}[\omega]$, 它由 2 形式 ω 生成, 满足 $\omega^{n+1} = 0$.

在 §4 中我们将证明在 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 中再没有其他元素了.

§2. 代数复形的同调群

定义 1 称运算写为加法的阿贝尔群 C 为 (链或上链) 复形是说它满足:

(1) 群 C 可以表为其子群 C_k 的直和 $C = \sum\limits_{k\geqslant 0} C_k$, 称 k 为它的维数或次 (可以说, 群 C 为分次群).

(2) 给出了线性算子 (同态)$\partial: C_k \to C_{k\pm 1}$ 使得 $\partial\partial \equiv 0$; 对每个 k, 同态 ∂ 提升 (或降低) 次数 $1: \partial(C_k) \subset C_{k+1}$ (或 $\partial(C_k) \subset C_{k-1}$). 如果 $\partial C_k \subset C_{k+1}$, 则称其为 "上链" 复形. 如果 $\partial C_k \subset C_{k-1}$, 则称其为 "链" 复形.

定义 2 链复形 C 的 k维同调群 $H_k(C)$ 是一个商群

$$H_k(C) = Z_k/B_k, \tag{1}$$

其中 $Z_k = \mathrm{Ker}\partial$ (即 $\partial Z_k = 0$) 是 k 维闭链, $B_k = \mathrm{Im}\partial = \partial C_{k+1} (B_k \subset Z_k)$ 为边缘子群. 上链复形的上同调群为商群

$$H^k(C) = Z^k/B^k, \tag{2}$$

其中上闭链群 $Z^k = \mathrm{Ker}\partial$, 上边缘子群 $B^k = \partial C_{k-1}$. 称直和 $H_*(C) = \sum\limits_{k\geqslant 0} H_k(C)$ 为总同调群, $H^*(C) = \sum\limits_{k\geqslant 0} H^k(C)$ 为总上同调群.

例 1 对每个流形 M^n 都有一个相伴的这个流形上微分形式构成的复形 $C=\sum\limits_{k=0}^{n}C_k$. 这里的 C_k 是流形 M^n 上的所有 (光滑的)k- 形式; 算子 $\partial: C_k\to C_{k+1}$ 即是外微分算子: $d=\partial$. 在 §1 中, 我们称这个复形的同调群为流形的上同调群.

例 2 在李群上, 或者在对称空间上, 可定义不变微分形式的复形. 所有这样的形式都是闭的, 因而算子 $\partial=d$ 在此时为零. 由定理 1.4 知, 这个复形的同调群 (对于对称空间) 同构于整个微分形式组成的复形的同调群.

在下面的各节中, 我们将遇到各种复形的例子.

现在设有两个复形 $(C^{(1)},\partial^{(1)}),(C^{(2)},\partial^{(2)})$.

定义 3 如果一个保持分次的同态 $f:C^{(1)}\to C^{(2)}$ 与微分运算交换:

$$f\partial^{(1)}=\partial^{(2)}f,\ f(C_k^{(1)})\subset C_k^{(2)},\ k=0,1,\cdots, \tag{3}$$

则称 f 为*复形的同态*.

成立下面命题:

命题 1 代数复形的同态 $f:C^{(1)}\to C^{(2)}$ 诱导出同调群间的同态:

$$f:H_k(C^{(1)},\partial^{(1)})\to H_k(C^{(2)},\partial^{(2)}),k=0,1,\cdots. \tag{4}$$

证明 同态 f 把闭链 $Z_k^{(1)}$ 变到闭链 $Z_k^{(2)}$, 边缘 $B_k^{(1)}$ 又映到边缘 $B_k^{(2)}$, 其中 k 为任意. 因此它定义了同调群的同态. 命题证完. □

例如, 流形间的光滑映射 $f:M\to N$ 定义了在这两个流形上的微分形式复形间的映射 f^*, 它按相反方向进行:

$$f^*:C(N)\to C(M).$$

这个映射是线性的, 并且对微分交换: 对任意形式 ω 有 $f^*d\omega=df^*\omega$. 因此 f^* 为微分形式复形间的同态.

定义 4 设 $f:C^{(1)}\to C^{(2)},g:C^{(1)}\to C^{(2)}$ 是代数复形间的两个同态. 如果存在同态 $D:C^{(1)}\to C^{(2)}$ 使得

$$D\partial^{(1)}\pm\partial^{(2)}D=f-g, \tag{5}$$

则称这两个同态 (*代数*) *同伦*.

如果算子 $\partial^{(1)},\partial^{(2)}$ 提升 (降低) 分次, 则映射 D 降低 (提升) 分次:

$$D(C_k^1)\subset C_{k-1}^{(2)}(D(C_k^1)\subset C_{k+1}^{(2)}). \tag{6}$$

命题 2　复形间同伦的映射诱导出同调群间同一个同态:

$$f = g : H_k(C^{(1)}, \partial^{(1)}) \to H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)}). \tag{7}$$

证明　如果 $c_k \in C_k^{(1)}$ 为闭链: $\partial^{(1)} c_k = 0$, 则

$$f(c_k) - g(c_k) = D\partial^{(1)} c_k \pm \partial^{(2)} D c_k = \pm \partial^{(2)} D c_k,$$

即在同调群 $H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)})$ 中 $f(c_k) \sim g(c_k)$. 命题得证. □

定理 1.1 在上同调群的同伦不变性的证明中的构造给出了代数同伦的例子. 在下一节中还会见到其他的例子.

定义 5　设 b_k 为群 $H_k(C, \partial)$ 的秩. 称形如

$$\chi(C, \partial) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k b_k = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \mathrm{rank}(H_k) \tag{8}$$

的交错和为复形 (C, ∂) 的**欧拉示性数**.

命题 3　复形 (C, ∂) 的欧拉示性数等于下面的数:

$$\chi(C, \partial) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \mathrm{rank} C_k. \tag{9}$$

证明　设 z_k 为闭链群 Z_k 的秩, β_k 为边缘 B_k 的秩. 于是对这两种秩我们有关系:

$$b_k = z_k - \beta_k, \tag{10}$$

$$\beta_k = \mathrm{rank} C_{k+1} - z_{k+1}. \tag{11}$$

设算子 ∂ 降低次数. 于是

$$b_k = z_k + z_{k+1} - \mathrm{rank} C_{k+1}$$

从而

$$\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k b_k = z_0 + \sum_{k \geqslant 0} (-1)^{k+1} \mathrm{rank}(C_{k+1}).$$

因为 $z_0 = \mathrm{rank} C_0$, 故命题得证 (显然, 在算子 ∂ 提升分次 1 的情况时命题也成立). □

设 G 为任意阿贝尔群 (其运算写作加法). 定义复形 $C \otimes G = \sum_{k \geqslant 0} C_k \otimes G$, 称为"系数在群 G 中的链复形".

我们记得, 两个阿贝尔群的张量积 $A\otimes B$ 是由所有形如 $\sum a_i\otimes b_i, a_i\in A, b_i\in B$ 的所有可能的有限和组成, 其中运算 $\otimes$ 满足条件:

$$(a_1+a_2)\otimes b = a_1\otimes b + a_2\otimes b,$$
$$a\otimes(b_1+b_2) = a\otimes b_1 + a\otimes b_2.$$

由此立即得到有用的关系式: $ma\otimes b = a\otimes mb$, 其中 m 为任意的整数.

习题 1 证明对任意群 G 成立 $G\otimes\mathbb{Z}=G$. 计算有限循环群的张量积 $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n$. 证明, 任意有限阿贝尔群与实数 (或有理数) 群的张量积等于零.

在形如 $c_k\otimes g, c_k\in C_k, g\in G$ 的链上, 算子 ∂ 的作用为 $\partial(c_k\otimes g)=\partial c_k\otimes g$. 将其线性扩张到整个群 $C\otimes G$ 上. 显然关系式 $\partial\partial=0$ 成立. 称复形 $C\otimes G$ 的同调群为复形 *C 以群 G 为系数的同调群*, 记为

$$H_k(C;G)\equiv H_k(C\otimes G).$$

设 G 为写成加法的阿贝尔群, (C,∂) 为链复形. 我们引进对偶的上链复形, 即取值于 G 的所有线性形式 (同态)C^*, 以 $\mathrm{Hom}(C,G)$ 这个代数中的记号表示它. 我们有一个自然的分次和:

$$C^*=\sum_{k\geqslant 0}C_k^* \tag{12}$$

(C_k^* 为 C_k 上的线性形式) 和边缘算子 ∂^*, 它对偶于 ∂:

$$\partial^*: C_k^*\to C_{k+1}^*,\ \partial: C_k\to C_{k-1},$$

其中

$$(\partial^* x, c)=(x,\partial c);\quad c\in C, x\in C^*. \tag{13}$$

我们有 $\partial^*\partial^*\equiv 0$. 通常以 $H^k(C;G)$ 记上同调群 $H_k(C^*,\partial^*)$, 并称其为*复形 C 在 G 中取值的上同调*.

设 $G=K$ 为域 (例如, 实数域 $K=\mathbb{R}$, 复数域 $K=\mathbb{C}$, 有理数域 $K=\mathbb{Q}$ 或者由 p 个元素组成的有限域 $\mathbb{Z}_p$, 其中 p 为素数), 并设 C 为域 K 上的有限维线性空间 C_k 的复形. 有定理:

定理 1 线性空间 $H^k(C;K)$ 和 $H_k(C)$ 相互对偶; 特别, 它们具有相同的维数.

证明 假设算子 ∂ 降低分次. 我们证明, C_k^* 中的元素 c^k 为 C^* 中的上闭链当且仅当 $(c^k,B_k)=0$, 其中 $B_k\subset C_k$ 为边缘子群. 事实上, 对 C_{k+1} 中任

意元 $\tilde{c}_{k+1}$ 有 $0=(\partial^* c^k, \tilde{c}_{k+1})=(c^k, \partial\tilde{c}_{k+1})$. 反之, 如果 $(c^k, \partial\tilde{c}_{k+1})=0$, 其中 $\tilde{c}_{k+1}\in C_{k+1}$ 为任意元素, 于是 $\partial^* c^k$ 在任意这些元 $\tilde{c}_{k+1}$ 取零值.

因此, 我们已经证明了复形 C^* 的上闭链空间 Z^* 与在边缘空间 B_k 上取零值线性形式的空间相同. 由于每个空间 C_k 为有限维的, 故复形 $(C^*)^*$ 与复形 C 相同. 因此闭链空间 Z_k 等同于 C_k^* 上那些在边缘子空间 B_k^* 为零的线性形式的空间. 换句话说, B_k^* 是在 Z_k 上为零的线性形式.

按前面所证明的, 我们知道 C_k^* 中每个元素 c^k, 满足 $\partial^* c^k=0$ 时, 便定义了在 $H_k(C)$ 上的一个线性形式. 另外, 空间 $H^k(C;K)$ 和 $H_k(C)$ 的维数相同. 定理证完. □

我们来定义两个复形 $(C^{(1)},\partial^{(1)})$ 和 $(C^{(2)},\partial^{(2)})$ 的张量积运算.

我们已知, 如果 A 和 B 分别为两个以 $(a_1,\cdots,a_s)$ 和 $(b_1,\cdots,b_p)$ 为基底的线性空间, 则张量积 $A\otimes B$ 是以 $a_i\otimes b_j, i=1,\cdots,s, j=1,\cdots,p$ 为基底的空间, 它由条件 $(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2)\otimes b=\lambda_1 a_1\otimes b+\lambda_2 a_2\otimes b$ 和 $a\otimes(\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2)=\lambda_1 a\otimes b_1+\lambda_2 a\otimes b_2$ 定义, 其中 λ_1,λ_2 为标量. (如果这个问题是关于用加法表示的阿贝尔群 A 和 B 的, 那么 λ 就只是整数 (参看前面习题 1 前的内容).)

我们令 $C=\sum C_k$, 其中

$$C_k=(C^{(1)}\otimes C^{(2)})_k=\sum_{p+q=k} C_p^{(1)}\otimes C_q^{(2)}, \tag{14}$$

$$\partial(c_p^{(1)}\otimes c_q^{(2)})=(\partial^{(1)}c_p^{(1)})\otimes c_q^{(2)}+(-1)^p c_p^{(1)}\otimes(\partial^{(2)}c_q^{(1)}). \tag{15}$$

容易验证 $\partial\partial=0$.

定理 2　设 $C^{(1)}$ 和 $C^{(2)}$ 为任意域 K 上的线性空间的复形. 对其张量积的同调群有公式

$$H_k(C^{(1)}\otimes C^{(2)})=\sum_{p+q=k} H_p(C^{(1)})\otimes H_q(C^{(2)}) \tag{16}$$

(重要的情形为 $K=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Q},\mathbb{Z}_p$).

为证此定理我们先要证明一个辅助命题.

引理　设 $C=\sum\limits_{n\geqslant 0} C_n$ 为域 K 上线性空间的复形. 于是在每个空间 C_n 中可选取一组有限基 $(x_{n,i}, y_{n,j}, h_{n,l})$ 使得算子 ∂ 作用为

$$\partial x_{n,i}=y_{n-1,i},\quad \partial y_{n,j}=0,\quad \partial h_{n,l}=0. \tag{17}$$

证明　由公式 (17) 可清楚看出向量 $y_{n,i}$ 为边缘, 向量 $h_{n,l}$ 为闭链, 但不是边缘, 并且给出了同调群 $H_n(C)$ 的基; 最后, $x_{n,i}$ 是链空间的基中不是闭链的部分. 因此我们所需要的这组基底容易从空间 C_0 开始, 经归纳得到.

定理的证明 在这两个空间 $C_p^{(1)}$ 和 $C_p^{(2)}$ 中分别选取上面给出的标准基底 $(x_p^{(1)}, y_p^{(1)}, h_p^{(1)})$ 和 $(x_p^{(2)}, y_p^{(2)}, h_p^{(2)})$ (我们略去了标出相应空间中基向量个数的指标). 我们来构造空间 $C_k = \sum\limits_{p+q=k} C_p^{(1)} \otimes C_q^{(2)}$ 的标准基. 第一组向量 (非闭链):

$$x_{pq} = x_p^{(1)} \otimes x_q^{(2)}; \quad a_{pq} = \frac{1}{2}\left[x_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)} + (-1)^{p-1} y_{p-1}^{(1)} \otimes x_{q+1}^{(2)}\right];$$
$$\alpha_{pq} = x_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}; \quad \beta_{pq} = (-1)^p h_p^{(1)} \otimes x_q^{(2)} \tag{18}$$

(在这些公式中其下标都有 $p+q=k$).

边缘的基向量:

$$b_{pq} = y_{p-1}^{(1)} \otimes x_{q+1}^{(2)} - (-1)^{p+1} x_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)};$$
$$y_{pq} = y_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}; \ \gamma_{pq} = y_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}; \ \delta_{pq} = h_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}. \tag{19}$$

向量组 (18),(19) 为线性无关 (请验证!); 现在要得到空间 c_k 的基还必须补充形如 $h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}, p+q=k$ 的向量. 我们来计算算子 ∂ 在空间的基上的作用. 由公式 (15),(17) 立即可得

$$\partial x_{pq} = b_{p,q-1}, \partial a_{pq} = y_{p-1,q}, \partial \alpha_{pq} = \gamma_{p-1,q}, \partial \beta_{pq} = \delta_{p,q-1}$$
$$\partial b_{pq} = \partial y_{pq} = \partial \gamma_{pq} = \partial \delta_{pq} = \partial(h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}) = 0,$$

即空间的这组基确实是标准的. 因此, $h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}, p+q=k$ 给出了空间 $H_k(C^{(1)} \otimes C^{(2)})$ 的基, 这就是所要证明的. □

§3. 单纯复形. 其同调和上同调群. 二维闭曲面的分类

我们现在来讲述对同调和上同调群的另一种不同的方法和定义, 它大大地拓展了这个理论的应用范围.

定义 n 维单形. 0 维单形即点 $[\alpha_0]$;1 维单形为线段 $[\alpha_0\alpha_1]$;2 维单形为三角形 $[\alpha_0\alpha_1\alpha_2]$; 3 维单形为四面体 $[\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ (图 2).

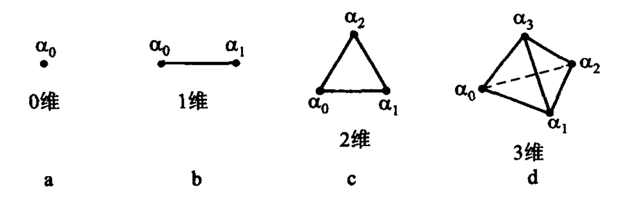


图 2 单形

由归纳, 如果 n 维单形 $\sigma^n = [\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_n]$ 已定义, 并在 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 则为了构造 $n+1$ 维单形, 需要在这个超平面 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 之外取一个新的顶点

α_{n+1}, 并且考虑所有连接新顶点 α_{n+1} 和单形 $[\alpha_0 \cdots \alpha_n]$ 的点的线段上所有点的集合即可. 这样所得到的就是 $n+1$ 维单形 $[\alpha_0 \cdots \alpha_{n+1}] = \sigma^{n+1}$.

更一般地, 称欧氏空间中 $n+1$ 个点 (顶点) 的凸包为 n 维单形.

n 维单形 $[\alpha_0 \cdots \alpha_n]$ 的*边缘*是那些由顶点张成的各个单形: $[\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}]$, $[\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_{n-2}\alpha_n], \cdots, [\alpha_1 \cdots \alpha_n]$. 于是, 第 i 个边缘是由点组 $[\alpha_0 \cdots \alpha_n]$ 中去掉第 i 个顶点 α_i 得到, 它是这个顶点所对着的面; 单形 σ^n 的第 i 个边缘 $\sigma_{(i)}^{n-1}$ 为

$$\sigma_{(i)}^{n-1} = [\alpha_0, \cdots \widehat{\alpha}_i \cdots \alpha_n] \tag{1}$$

(去掉第 i 个顶点).

从单形 $[\alpha_0 \cdots \alpha_n]$ 中去掉任意多个数目的顶点可以得到低维的面.

定义 1　单形 $\sigma^n = [\alpha_0 \cdots \alpha_n]$ 的*定向边缘*为形如下面的边缘的形式线性组合:

$$\partial\sigma^n = \partial[\alpha_0 \cdots \alpha_n] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[\alpha_0 \cdots \widehat{\alpha}_i \cdots \alpha_n] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{(i)}^{n-1}. \tag{2}$$

例如, 对 0,1,2 维单形, 我们有:

$$\partial[\alpha_0] = 0, \tag{3}$$

$$\partial[\alpha_0\alpha_1] = [\alpha_1] - [\alpha_0], \tag{4}$$

$$\partial[\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1]. \tag{5}$$

由图 2 可清楚看出, 带符号的边缘对应了自然的定向.

引理 1　对 n 维单形, 我们有公式

$$\partial\partial[\alpha_0 \cdots \alpha_n] = 0. \tag{6}$$

证明　直接计算即可. 例如, 对 $n=2$ 我们有

$$\partial[\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1],$$

$$\partial\partial[\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = \{[\alpha_2] - [\alpha_1]\} - \{[\alpha_2] - [\alpha_0]\} + \{[\alpha_1] - [\alpha_0]\} = 0.$$

对所有 n 情形的计算是相似的: $\partial\partial\sigma^n = \partial\left(\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_i^{n-1}\right)$; 在这个和中, 边缘 $\sigma_{(ij)}^{(n-2)}$ 出现了两次 (顶点 α_i, α_j 消去), 它们各在边缘 $\partial\sigma_{(i)}^{n-1}$ 和 $\partial\sigma_{(j)}^{n-1}$ 中, 并具有相反的符号. □

定义 2　*单纯复形*是由一些任意维数的单形组成的集合, 它们具有下列性质:

1) 其中任意单形连同其所有维数的边缘均属于这个集合;

2) 两个单形如果相交 (即有公共点) 则只交出某个维数的整个边缘, 并且这时只交于一个边缘.

有限单纯复形是指由有限个单形构成的复形.

把有限单纯复形的所有顶点按某种方式重新排序为 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_N$. 于是 r 维单形 $[\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}]$ 由在上述排序中某个顶点的子集合决定.

设 G 为一个任意的交换群, 其中的群运算写为加法 $(+)$. 单纯复形的 k 维**链**是指形如 $c_k = \sum g_i\sigma_i$ 的有限的形式线性组合, 其中 σ_i 为不同的 k 维单形, 它按所给的复形的顶点排序给出, 而其中的 g_i 为群 G 中的元素. 链的加法定义为: 如果 $c_k = \sum g_i\sigma_i, c'_k = \sum g'_i\sigma_i$, 则 $c_k + c'_k = \sum(g_i + g'_i)\sigma_i$. 于是, 链构成了一个阿贝尔群.

链的边缘 ∂c_k 是一个 $k-1$ 维链, 定义为

$$\partial c_k = \sum_i g_i \partial\sigma_i. \tag{7}$$

显然有公式 (由引理 1): $\partial\partial c_k = 0$.

闭链是使 $\partial c_k = 0$ 的链 c_k. 闭链也构成了群 Z_k. 同调于零的闭链 (边缘) 是这样的闭链 c_k 使得 $c_k = \partial c_{k+1}$. 这些闭链构成了边缘群 B_k.

定义 3 称所有 k 维闭链群 Z_k 对同调于零的闭链 B_k 的商群为单纯复形 M 的**同调群** $H_k(M;G)$ (两个闭链等价是说 $c'_k - c''_k = \partial c_{k+1}$).

我们感兴趣的情形是 $G = \mathbb{Q}$ (有理数), $G = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{Z}$ (整数), $G = \mathbb{Z}_2$ (模 2 剩余域) 和更一般的 $G = \mathbb{Z}_m$ (模 m 剩余, 特别当 m 为素数时 $\mathbb{Z}_m$ 为域). 当 $G = \mathbb{R}$ 时所有的 $H_i(M;\mathbb{R})$ 为域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 空间 $H_i(M;\mathbb{R})$ 的维数 b_i 被称做复形 M 的第 i 个**贝蒂** (Betti) **数**.

对于有限单纯复形可以定义**欧拉示性数**: 如果 γ_i 为复形 M 中 i 维单形的个数, 则复形 M 的欧拉示性数等于

$$\chi(M) = \sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\gamma_i. \tag{8}$$

定理 1 设 b_i 为空间 $H_i(M;\mathbb{R})$ 的维数 (贝蒂数). 于是有等式

$$\chi(M) = \sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\gamma_i = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j b_j. \tag{9}$$

证明 i 维链群 C_i 是维数为 γ_i 的线性空间, 于是由命题 2.3 得到此定理的证明. □

注 欧拉示性数 $\chi(M)$ 可以定义为 (参看 [1], 卷 II, §15) 向量场 (或光滑函数) 的奇点指数的和. 那么, 我们现在能用同调群来计算它了.

我们现在来定义它的对偶, 即 k 维上链 c^k, 这是 k 维整数系数链复形 M 上的线性函数, 它取值于群 G. 因此, 上链 c^k 对每个 k 维单形 σ_i 有一个伴随的 G

中元素 $c^k(\sigma_i)$, 其中

$$c^k(a\sigma_{i1} + b\sigma_{i2}) = ac^k(\sigma_{i1}) + bc^k(\sigma_{i2}),$$

a, b 为整数. 这些线性函数的和仍是个上链, 故上链构成了群.

任意链 c^k 的上边缘 δc^k 是个 $(k+1)$ 维上链, 由等式

$$\delta c^k(\sigma_i) = c^k(\partial\sigma_i) \tag{10}$$

定义 (或者以 §2 的记号表示: $\delta = \partial^*$), 其中 σ_i 为 $k+1$ 维单形. 有 $\delta\delta = 0$. 事实上,

$$\delta\delta c^k(\sigma_i) = \delta c^k(\partial\sigma_i) = c^k(\partial\partial\sigma_i) = 0.$$

上闭链为满足 $\delta c^k = 0$ 的上链 c^k.(上同调) 等价于零的上闭链表示 $c^k = \delta c^{k-1}$.

定义 4 上同调群 $H^k(M; G)$ 是上闭链群对于等价于零的上闭链子群的商群 ($c^k \sim c^{k'}$ 表示 $c^k - c^{k'} = \delta c^{k-1}$).

上链复形对偶于单纯链复形. 对 $G = K$ 为域的情形, 由定理 2.1 能得到

推论 空间 $H_i(M; K)$ 和 $H^i(M; K)$ 的维数相等, 其中 K 为域.

考虑 $G = \mathbb{Z}_m$ (mod$m$ 剩余) 情形. 设 $x \in H_q(M; G)$, 并设 $\bar{x}$ 为由 $x = \bar{x}(\text{mod}m)$ 给出的整系数链. 我们有

$$\partial\bar{x} = mu, \quad \text{或} \quad u = \frac{\partial\bar{x}}{m}$$

在整系数链群中成立. 如果元素 $\bar{x}$ 在 $x \in H_q(M; \mathbb{Z}_m)$ 的同调类中变化: $\bar{x} \to \bar{x} + \partial y + mz$, 我们则得到了

$$\frac{\partial\bar{x}}{m} \to \frac{\partial\bar{x}}{m} + \frac{\partial\partial y}{m} + \partial z = \frac{\partial\bar{x}}{m} + \partial z = u + \partial z.$$

此时有 $\partial u = 0$.

因此, 有一个有明确定义的 "博克斯坦 (Bockstein) 同态", 并且是唯一的:

$$x \mapsto \frac{\partial\bar{x}}{m}, \quad \text{其中 } \bar{x}(\text{mod}m) \sim x \in H_q(M; \mathbb{Z}_m),$$
$$H_q(M; \mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(M; \mathbb{Z}). \tag{11}$$

类似地, 在上同调情形, 我们也有同态

$$H^q(M; \mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\delta_*} H^{q+1}(M; \mathbb{Z}). \tag{12}$$

命题 1 设 $x \in H_q(M;\mathbb{Z}_m)$. 于是在 $H_{q-1}(M;\mathbb{Z})$ 中 $\partial_* x = 0$ 当且仅当 x 由 $H_q(M;\mathbb{Z})$ 中的元 y 经 $\bmod m$ 约化得到:

$$x = y(\bmod m) \leftrightarrow \partial_* x = 0.$$

类似地, 在上同调中 $x = y(\bmod m) \leftrightarrow \delta_* x = 0$, 其中 $x \in H^q(M;\mathbb{Z}_m), y \in H^q(M;\mathbb{Z})$.

证明 如果 $x = y(\bmod m)$, 则可选取 $\bar{x}$ 使得 $\partial\bar{x} = 0$, 并且在 $H_{q-1}(M;\mathbb{Z})\partial_* x = \frac{\partial\bar{x}}{m} = 0$. 反之, 如果 $\partial_* x$ 在 $H_{q-1}(M;\mathbb{Z})$ 中为零, 则 $\frac{\partial\bar{x}}{m} = \partial z$, z 为某个链. 令 $y = \bar{x} - mz$, 于是 $\partial y = 0, y(\bmod m) = x$. 命题得证. □

于是, ∂_* 和 δ_* 的意义在于使我们能在 $\bmod m$ 约化同调群中识别出它们在整系数链中的像.

另一个应用: 在群 $H_{q-1}(M;\mathbb{Z})$ 中的像 $\partial_* H_q(M;\mathbb{Z}_m)$ 给出了 $H_{q-1}(M;\mathbb{Z})$ 中满足 $mu = 0$ 的元素 u (挠元). 事实上由定义, $\partial_*(mx) = m(\partial_* x) = 0$. 反之, 如果 $mv = 0$, 其中 $v \in H_{q-1}(M;\mathbb{Z})$, 则有某个整系数环 $\bar{x}$ 使 $mv = \partial\bar{x}$, 从而有元素 $x = \bar{x}(\bmod m)$, 使得 $x \in H_q(M;\mathbb{Z}_m)$, 且 $\partial_* x = v$.

例 对 $M = \mathbb{R}P^2$, 则有 $x \in H_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, x \neq 0$. 那么, $\partial_* x \neq 0$ 于 $H_1(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ 中.

习题 1 证明对所有非定向流形 M, 在群 $H_n(M^n;\mathbb{Z}_2)$ 中有一个闭链 $[M^n] = x$, 使得 $\partial_* x \neq 0$, 并且 $\partial_* x \in H_{n-1}(M^n;\mathbb{Z})$ 的阶数为 2.

例 对于上同调群, 我们有 $u \in H^1(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2)$ 使 $\delta_* u \neq 0$, 并在 $H^2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z})$ 中阶数等于 2.

假设流形 M^n 已被剖分为单形, 从而成为单纯复形. 于是对它可定义和计算其同调和上同调群.

k 维光滑单形 σ^k 是指这个单形在流形 M^n 中的一个可微嵌入 (连同单形 σ^k 在空间 $\mathbb{R}^k$ 中的一个开邻域). 如果一个流形以光滑单形剖分, 我们则说此流形可被*三角剖分*.

我们叙述下面的两个重要事实:

A. 同调和上同调群不依赖于流形的三角剖分, 并且它们是同伦不变的 (参看 §6).

B. 对 $G = \mathbb{R}$, 它的上同调群与以微分形式定义的上同调群 (见 §14) 相同.

我们来解释后面一个论断. 设 σ^k 是 M^n 的一个光滑的 k 维单形; ω_k 为 k 阶微分形式. 定义形式 ω_k 在单形 σ^k 上的积分:

$$\langle \omega_k, \sigma^k \rangle = \int_{\sigma^k} \omega_k. \tag{13}$$

如果 $c_k = \sum\limits_i r_i \sigma_i^k$ 为具实系数的链, 则可定义形式在链 c_k 上的积分为

$$\langle \omega_k, c_k \rangle = \sum_i r_i \int_{\sigma_i^k} \omega_k. \tag{14}$$

由斯托克斯公式 (参看 [1], 卷 I, §26) 成立等式:

$$\langle d\omega_k, c \rangle = \langle \omega_k, \partial c \rangle \leftrightarrow \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \tag{15}$$

任意闭形式 $\omega(d\omega = 0)$ 因而定义了在单纯同调类上的线性函数: 如果 c_1, c_2 为同调的闭链, 即 $c_1 = c_2 + \partial c'$, 则

$$\langle \omega, c_1 \rangle = \langle \omega, c_2 \rangle + \langle d\omega, c' \rangle = \langle \omega, c_2 \rangle.$$

任意恰当形式 ω, 即 $\omega = d\omega'$, 它在任意闭链上化为零 (请验证!).

结论　*通过微分形式定义的上同调 $H^k(M;\mathbb{R})$ 中每个上同调类定义了单纯同调群 $H_k(M;\mathbb{R})$ 上的线性函数.*

上面所列出的论断 B 表明, 按这种方式可得到群 $H_k(M;\mathbb{R})$ 上的任意线性函数, 同时非平凡 (即非恰当) 的闭形式总给出 $H_k(M;\mathbb{R})$ 上的非平凡线性形式.

设 M^n 为闭连通流形. 容易看出, 它的任何一个剖分 (分成单纯形) 均具有下面的性质: 任意一个 $n-1$ 维的单形恰好是两个 n 维单形的边缘.

定理 2　有等式

$$H_n(M^n;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$$

(这里 $\mathbb{Z}_2$ 为模 2 剩余, 是由两个元组成的群).

证明　考虑链 $z = \sum\limits_i \sigma_i^n$, 这里的和是取在所有的 n 维单形上, 而它们的定向则是任意的. 在域 $\mathbb{Z}_2$ 上成立链的等式

$$\partial \sigma^n = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i^{n-1}, \tag{16}$$

其中 σ_i^{n-1} 为单形 σ^n 的边缘. 在和 $\partial z = \sum\limits_i \partial \sigma_i^n$ 中的每一个 $(n-1)$ 维单形恰好出现两次. 故而 $\partial z = 0$. 显见, 在这里没有其他的非零 n 维闭链了. 定理证完. □

设 M^n 为定向流形.

命题 2　对于闭的连通定向流形, 其 n 维同调群 $H_n(M^n;G)$ 等于 G(G 为任意群).

证明 在流形 M^n 的每点上已有了所给定向的切标架. 我们对 n 维单形给予与此标架定向相对应的定向. 设单形 σ_1^n 和 σ_2^n 以单形 σ^{n-1} 为公共边缘 (参看 $n=2$ 时的图 3). 这个单形在 $\partial\sigma_1^n$ 和 $\partial\sigma_2^n$ 中具有相反的符号. 于是, 链 $[M^n]=\sum\limits_i \sigma_i^n$ 为闭链 (此和取在所有的 n 维单形上). 显然, 任意其他的 n 维闭链的形式为 $z=g[M^n]$, 其中 g 为群 G 中的元. 因为 n 维的边缘不存在, 故定理成立. □

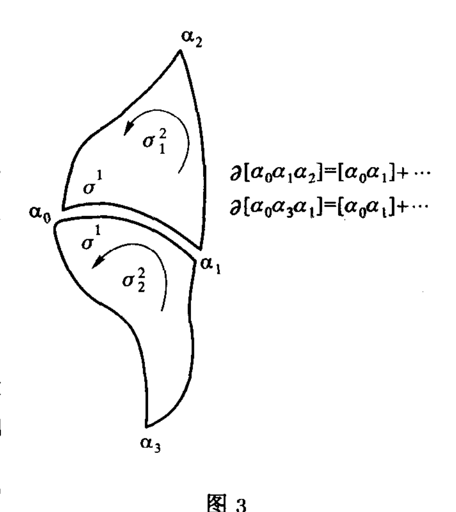


图 3

命题 3 设 $G=\mathbb{Z}$ 为整数群. 那么, 对非定向的 n 维连通闭流形 M^n 有

$$H_n(M^n;\mathbb{Z})=0.$$

证明 任意 n 维闭链应该有形式 $z=\lambda\sum\limits_i \sigma_i^n$, 其中 $\lambda\neq 0$ 为整数, 而单形 σ_i^n 按适当的方式定向; 如果单形 σ_1^n 和 σ_2^n 以单形 σ^{n-1} 为边缘, 则此单形在 $\partial\sigma_1^n$ 和 $\partial\sigma_2^n$ 中以不同的符号出现当且仅当单形 σ_1^n 和 σ_2^n 在流形 M^n 中有相同的定向 (请验证!). 因此 $\partial z=0$ 当且仅当在所有单形 σ_i^n 上可以选取出统一的定向, 即流形 M^n 是定向的. 命题得证. □

推论 设 $[M^n]=\sum\limits_i \sigma_i^n$ 为非定向流形 M^n 的所有 n 维单形的和 (生成群 $H_n(M^n;\mathbb{Z}_2)$). 于是 $\partial_*[M^n]$ 在群 $H_{n-1}(M^n;\mathbb{Z})$ 中不等于零, 并且 $2\partial_*[M^n]=0$.

现转而讨论可剖分的二维光滑流形, 并利用单纯复形对其分类.

让我们来给出二维光滑紧连通流形的分类. 在本节整个余下部分我们只讨论这种流形, 因而不再每次都重复上面所说的给予流形的这些限制条件.

引理 2 任意二维光滑流形 M^2 可以被光滑剖分 (即以光滑的曲线分割成光滑的三角形, 使得这个剖分中的任意两个三角形或者不相交, 或者有一个公共的顶点, 或者有一个公共的边).

证明 将 M^2 嵌入到有限维欧氏空间中 (参看 [1], 卷 II, §9), 于是在 M^2 上有了诱导的黎曼度量. 对于充分小的 $\varepsilon>0$, 任意两个满足 $\rho(x,y)<\varepsilon$ 的点 $x,y\in M^2$ (ρ 为 M^2 上由此黎曼度量诱导的距离函数) 间, 用一条唯一的最短的测地线 γ_{xy} 相连接. 用有限个半径 $<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的圆盘覆盖 $M^2: D_1,D_2,\cdots,D_N$. 圆盘 D_1 可以容易地以测地线进行三角剖分. 要把三角剖分拓展到与 D_1 有不空交的其他圆盘 (例如 D_2), 我们只要注意到属于 $D_1\bigcap D_2$ 的 D_1 中的测地线, 从

D_2 的角度看也是它的测地线, 因此三角剖分可以拓展到圆盘 D_2 (如有需要, 可先在 D_1 上进行细分). 经过有限步后便可完成这个过程. 引理得证. □

让我们从根本上给出全部二维流形的描述. 第一组是具有 g 个环柄的球面 M_g^2; g 为曲面的亏格. 例如, 在研究形如 $w=\pm\sqrt{P_n(z)}$ (多项式 P_n 无重根) 的代数函数的黎曼面时遇见的便是这些流形. 我们记得, M_g^2 由 $\mathbb{C}P^2(z,w)$ 中方程 $w^2-P_{2g+1}(z)=0$ 的零点集合表示. 这些流形可以在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面的形式光滑地实现, 它们在图 4 中有所显示 (更详细的可参看 [1], 卷 Ⅱ, §4).

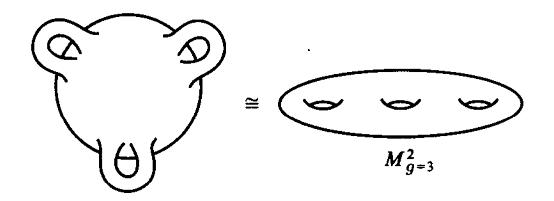


图 4 具有 g 个环柄的球面 $S^2+(g)=M_g^2$ (图中 $g=3$)

第二组流形 (以 M_μ^2 表示) 由从球面 S^2 中挖去 μ 个互不相交的圆盘 D^2, 并在每个空洞的边缘上将对径点重合以后得到 (参看图 5, a). 称这个运算为 "在球面 S^2 上附加上 μ 个默比乌斯 (Möbius) 带".

特别, 当 $\mu=1$ 时曲面 M_μ^2 为实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ (图 5,b), 当 $\mu=2$ 时称曲面 M_μ^2 为克莱因瓶. 我们注意到, 在 [1], 卷 Ⅱ, §18 中克莱因瓶被定义成平面对某个离散运动群的商空间. 从图 5,c 清楚看出它与 $M_{\mu=2}^2$ 的模型是一样的.

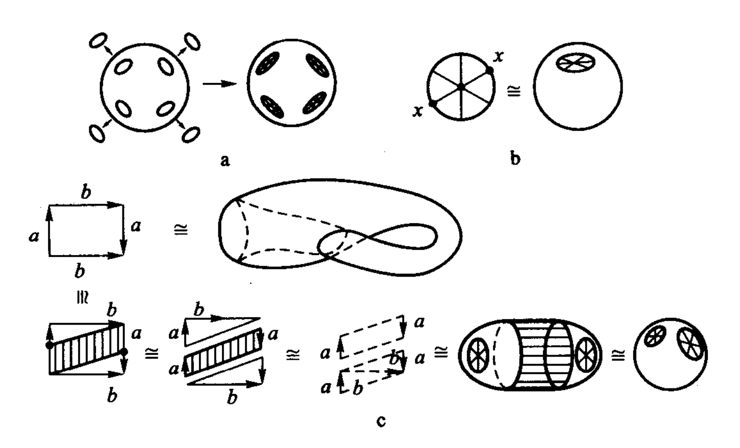


图 5 a) 流形 $M_\mu^2=S^2+(\mu)$ (图中 $\mu=4$), 由球面 S^2 附加 μ 个默比乌斯带得到; b) $M_{\mu=1}^2=\mathbb{R}P^2$, 实射影平面; c) $M_{\mu=2}^2$, 克莱因瓶

可以推断应该存在独立的 "混合型" 的第三组: 在球面 S^2 上附加 g 个环柄

和 μ 个默比乌斯带. 但是这个混合组完全包含在 M_{μ}^2 组中. 事实上, 考虑只附加一个环柄和一个默比乌斯带的 S^2 情形 (参看图 6). 然而对于克莱因瓶有图 7 表明的微分同胚.

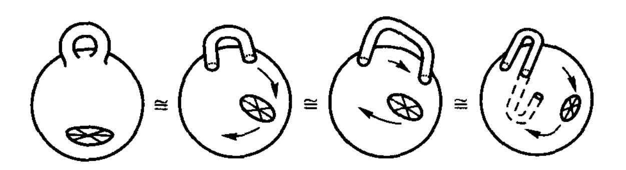


图 6

因此, 在 S^2 上附加一个环柄和一个默比乌斯带等价于在 S^2 上附加三个默比乌斯带 (参看图 8). 在至少存在一个默比乌斯带时, 每个环柄可以由两个默比乌斯带来微分同胚地替代.



图 7 具有内外翻转环柄的球面 S^2　　图 8

我们现在要严格地证明, 流形 M^2 的确完全由这两个无限组 M_g^2 和 M_{μ}^2 描述.

考虑任意一个 M^2 (参看在最初所给的限制条件), 以及上面已有的光滑剖分 (参看引理 2). 将 M^2 沿此剖分的边剪开, 并在每条切口的两边预先标上同一个字母 (不同的切口以不同字母表示), 也在切口两边固定同一个方向 (参看图 9).

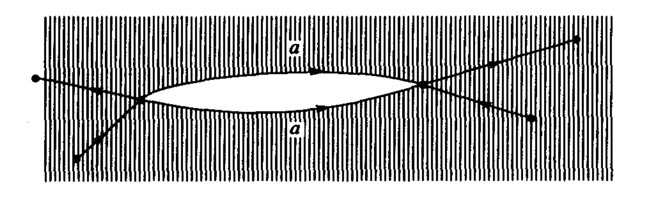


图 9

于是, 我们把 M^2 转换成三角形的集合, 这些三角形的边上标注上了字母并给出了方向; 每个字母在此集合中恰恰出现两次, 同时两个相同字母的边总属于不同的三角形. 我们开始进行相反的粘合成 M^2 的过程, 但要求在每次经粘合得到新三角形的区域应保持为平面区域. 显然, 在这个过程的最后结果是我们得

到了 (算上在边上所标的记号) 一个连通的平面多边形 W, 其边标有字母, 并给出了方向 (每个字母恰好出现两次). 我们称这个多边形为*基本多边形* (它并不由所给的三角剖分唯一定义). 我们在这个多边形 W 上固定一个方向, 并给它一个相应的字 (我们以同一个字母 W 表示它), 这个字是沿着 W 的边缘自然出现的 (从任一个顶点出发): 一个接一个地写下标注在 W 的边上的字母, 同时在字里的每个字母上记上幂次: 如果边的定向与 W 的定向相同, 则幂为 $+1$, 而在相反的情形, 幂为 -1. 参看图 10 中的例子.

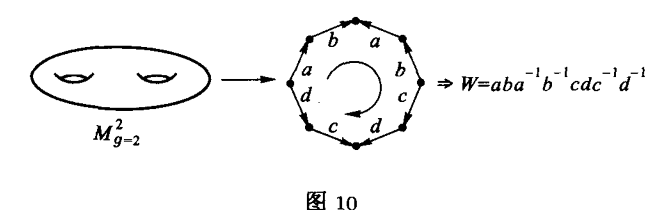


图 10

因此, 我们使每个 M^2 相伴于某个 (不是唯一的) 字 $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1}a_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{i_k}^{\varepsilon_k}, \varepsilon_i = \pm 1$, k 为偶数, 是 W 的边的个数; 每个 a_α 在 W 中正好出现两次. 这些字母给出了 M^2 一个字码; 每个 M^2 对应这种码的一个无限集. 我们现在以初等运算 (由 M^2 的微分同胚生成) 要重新构造这些字码, 以将其化为标准型. 最后发现, 只存在三个标准型 (它们从而给出了 M^2 的分类).

引理 3 W 的字可以重新构造, 使得 W 的顶点 (即流形的顶点) 成为单独一个点 (即对应流形的一个点).

证明 假设至少有两个非空的顶点等价类: $\{P\}$ 和 $\{Q\}$. 可以假定存在一条边 $a \in \partial W$, 使其两端点各属于不同的类 $\{P\}$ 和 $\{Q\}$. 进行下面的初等运算 (参看图 11). (在 ∂W 中加上重黑色的线段是我们现在所不关心的.)

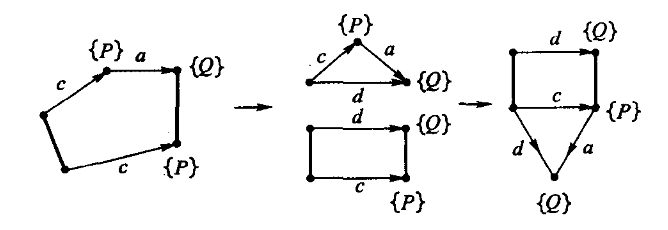


图 11

显然可以看出, 这个重新粘合多边形 W 的运算对应于 M^2 的同胚. 另一方面, 这个运算把以 $\{P\}$ 为代表的类的顶点数目减少了一个, 而以 $\{Q\}$ 为代表的类的顶点数增加了一个: $(\{P\},\{Q\}) \to (\{P\}-1;\{Q\}+1)$. 因此, 我们逐渐消减类 $\{P\}$, 把这个类中的顶点 "抽" 到另外的类中去. 消去类 $\{P\}$ 中最后一个顶点

的运算是最后一步 (参看图 12).(注意, 在消减类 $\{P\}$ 的过程中, 把 $\{P\}$ 中顶点抽到的类 $\{Q\}$ 可能有了变化.) 只有一个顶点类的多边形 W (或字 w) 通常被称为 "简约的". □

引理 4 设字 W 具形式 $W=—aa^{-1}—$. 于是存在同胚映射, 把字 W 转换为等价的字 $W'=—1—$. □

证明 见图 12.

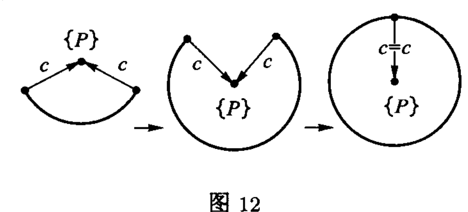


图 12

引理 5 $W=—a—a—\simeq W'=—aa—$.

证明 参看图 13. 在最右边的图中以 a 替换 c. 引理得证. □

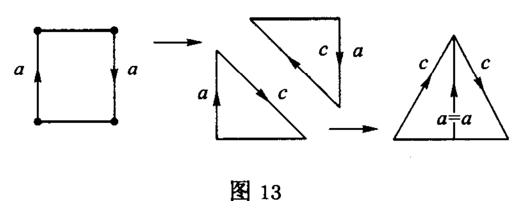


图 13

引理 6 $W=—a—b—a^{-1}—b^{-1}—\simeq W'=—aba^{-1}b^{-1}—$.

证明 见图 14. 引理得证. □

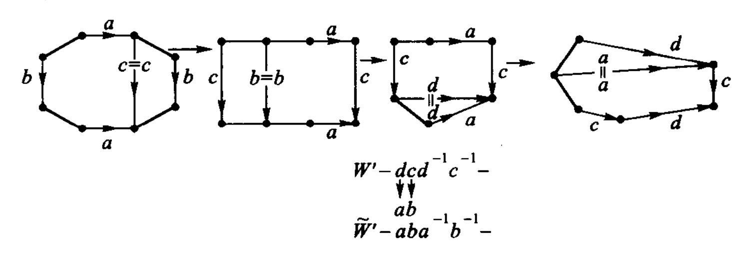


图 14

引理 7 如果 $W=—a\overset{\alpha}{—}a^{-1}—$, 其中字母的集合 $\alpha\neq\varnothing$, 于是存在 $b\in\alpha$, 使 $b^{-1}\notin\alpha$:

$$W=—a\underbrace{—b—}_{\alpha}a^{-1}—b^{-1}—.$$

证明　设若相反: 对任意 $b \in \alpha$ 有 $b^{-1} \in \alpha$. 那么在 W 的顶点集合中至少出现两个不等价的顶点类, 这是因为 α 中的顶点只与顶点 $\in \alpha$ 相互作用 (粘合)(参看图 15). 由于 $\alpha \neq \varnothing$ 以及 $W \setminus \{a \bigcup \alpha \bigcup a^{-1}\} \neq \varnothing$ (见引理 4), 于是导出了与引理 3 论断的矛盾, 因为根据这个论断, W 应该是简约的多边形. □

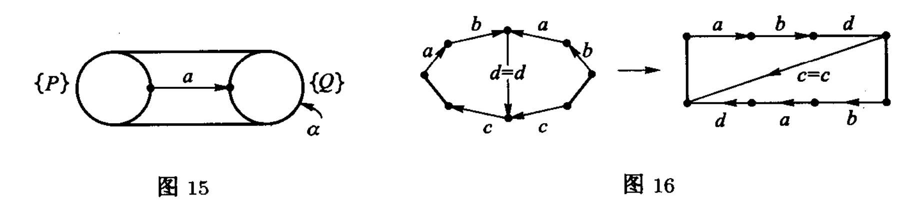


图 15　　图 16

引理 8　$W = —aba^{-1}b^{-1}—cc— \simeq W' = —a^2—b^2—c^2—$.

证明　参看图 16. 最后由引理 5 得出引理 8. □

因此, 我们已经证明了下面的定理.

定理 3 (关于二维曲面的分类)　任意二维的光滑连通紧闭流形 M^2 微分同胚于下面由 W 所定义的流形中的一种:

1) $W = aa^{-1}$;

2) $W = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$;

3) $W = c_1^2c_2^2\cdots c_\mu^2$.

任意有边缘的二维光滑连通紧流形可以用下面的运算从二维圆盘得到:

a) 去掉有限个点 (即有限个具充分小半径的圆盘);

b) 粘上有限个环柄;

c) 粘上有限条默比乌斯带.

在进行这些所列的运算时, 不应该与圆盘 D^2 的边缘接触.

我们将以更形象的方式描述对应于这种分类下的流形 M^2 的结构.

类形 1) 的流形微分同构于 S^2. 见图 17.

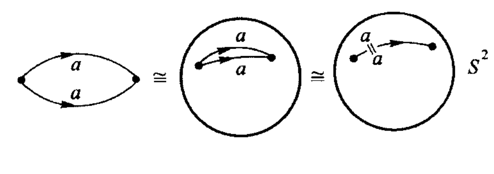


图 17

类型 2) 的流形微分同构于具 g 个环柄的球面 S^2 (定向流形 M_g^2). 见图 18.

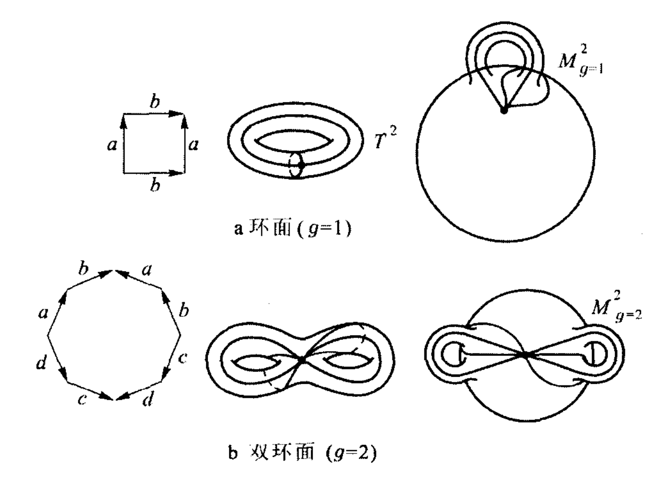


图 18

类型 3) 的流形微分同胚于具 μ 个默比乌斯带的球面 S^2 (非定向流形 M_μ^2). 见图 19.

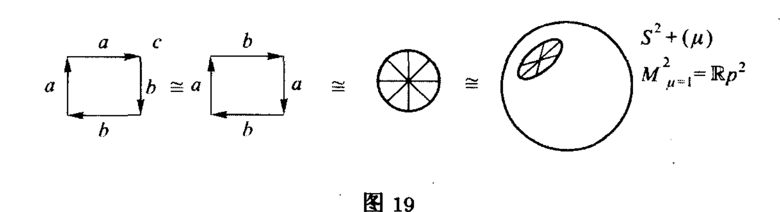


图 19

注 1 作为初等练习, 我们可计算出类型 1),2),3) 流形的同调群 (例如, 整系数的同调群). 计算结果表明所有列出的标准型的流形之间不同胚.

注 2 有另一个简便的方法来给出 $\{M^2\}$ 的字码: 任何 M^2 可以下面的形状表示:

$$W = a_1a_2\cdots a_Na_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{N-1}^{-1}a_N^{\varepsilon},\ \varepsilon = \pm 1,$$

其中 $\varepsilon = -1$ 当且仅当 $M^2 = M_g^2$, 即定向流形 (这时 $N = 2g$, 为偶数); $\varepsilon = +1$ 当且仅当 $M^2 = M_\mu^2$ 为非定向.

证明 考虑 M_g^2 情形: $W = a_1\cdots a_Na_1^{-1}\cdots a_{N-1}^{-1}a_N^{-1}; N = 2g$. 利用初等变换 (参看上面的引理 3—8) 将 W 约化为 M_g^2 的标准型 (见前面的定理). 这个约

化以逐次分离出形如 $aba^{-1}b^{-1}$ 的标准环柄来实现. 考虑

$$W = \underset{\underset{a}{\|}}{a_1}\underset{\underset{b}{\|}}{a_2}\underbrace{a_3\cdots a_N}_{Q}\underset{\underset{a^{-1}}{\|}}{a_1^{-1}}\underset{\underset{b^{-1}}{\|}}{a_2^{-1}}\underbrace{a_3^{-1}\cdots a_N^{-1}}_{P}.$$

进一步看图 20.

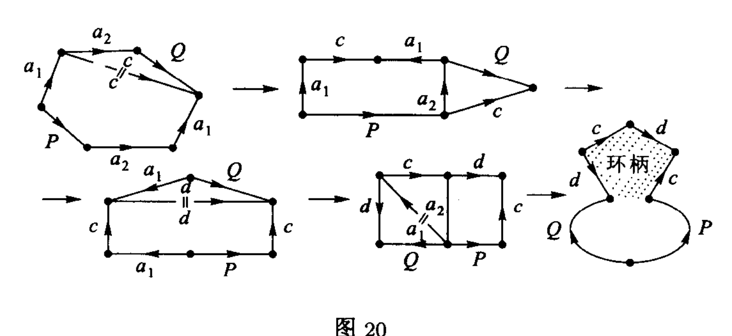


图 20

于是, 我们以清晰的形式分离出第一个环柄而不改变线段 P 和 Q. 继续进行分离出环柄的运算, 并记住 $N = 2g$ 为偶数, 然后达到字 $W = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} \simeq M_g^2$. 因此, 我们表示了全部的定向流形. 所以 “定向情形” 的定理证完. 对于 “非定向情形” 的证明完全是相似的 (参看引理 3—8), 我们把其略去 (请自己独立地去进行证明!). □

§4. 在拓扑空间上附加胞腔的运算. 胞腔空间. 关于胞腔空间的约化定理. 曲面和其他某些流形的同调群和基本群

设 X 为拓扑空间, D^n 为 n 维圆盘; $S^{n-1} = \partial D^n$ 为其边缘, 即 $n-1$ 维球面. 假定在圆盘 D^n 上固定了一个定向; 它诱导出了 S^{n-1} 上的定向. 设给出了这个球面到空间 X 的一个映射

$$f : S^{n-1} \longrightarrow X. \tag{1}$$

将球面 S^{n-1} 上的每个点等同于空间 X 中的点 $f(x)$, 我们得到了新的空间 $D^n \bigcup_f X$. 我们称空间 $D^n \bigcup_f X$ 由空间 X 附加了 n 维胞腔 (D^n, f) 而得到.

我们以下面的方式在空间 $D^n \bigcup_f X$ 上引进拓扑. 称集合 $K \subset D^n \bigcup_f X$ 为闭是说交集 $K \bigcap X$ 闭于 X, 同时交 $K \bigcap D^n$ (在映射 $D^n \bigcup X \to D^n \bigcup_f X$ 下的) 的整个逆像闭于 D^n.

例 1　球面 S^n 可由一个点 $*$ 附加一个 n 维胞腔得到: $S^n = D^n \bigcup_f *$, 其中 $f : S^{n-1} \to *$ 为映成一个点的映射.

例 2 实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 可以看作把 D^n 在边缘 S^{n-1} 上的对径点叠合而成的空间. 我们注意到, 球面 S^{n-1} 在叠合它的对径点时又得到了 $\mathbb{R}P^{n-1}$. 于是可将 $\mathbb{R}P^n$ 看作是在 $\mathbb{R}P^{n-1}$ 上附加一个 n 维胞腔得到的:

$$\mathbb{R}P^n = D^n \bigcup_{f_n} \mathbb{R}P^{n-1}. \tag{2}$$

其中的映射 $f_n : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ 为标准的覆叠映射.

引理 1 如果映射 $f, g : S^{n-1} \to X$ 同伦, 则空间 $D^n \bigcup_f X$ 和 $D^n \bigcup_g X$ 同伦等价.

证明 设映射 $F : S^{n-1} \times I \to X$ 为 f 与 g 的同伦映射, 其中 I 为单位线段. 在空间 X 上附加乘积空间, 其边缘部分的映射为 F:

$$\widehat{X} = (D^n \times I) \bigcup_F X. \tag{3}$$

于是空间 $D^n \bigcup_f X$ 和 $D^n \bigcup_g X$ 都在 $\widehat{X}$ 中:

$$\begin{aligned} D^n \bigcup\nolimits_f X = ((D^n \times 0) \bigcup\nolimits_F X) \subset \widehat{X}, \\ D^n \bigcup\nolimits_g X = ((D^n \times 1) \bigcup\nolimits_F X) \subset \widehat{X}. \end{aligned} \tag{4}$$

设 φ_t 为 $D^n \times I$ 到 $D^n \bigcup (S^{n-1} \times I)$ 的收缩同伦, 这是通过由点 $*$ 引出的射线构造的 (见图 21). 因此定义了同伦等价 $\widehat{X} \sim D^n \bigcup_f X$. 类似地, $\widehat{X} \sim D^n \bigcup_g X$. 引理得证. □

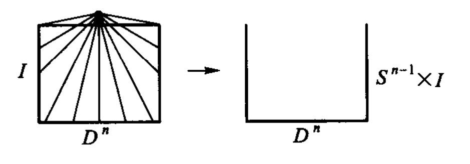


图 21

定义 1 称空间 X 是*胞腔空间*是说, 它由从一个有限点组开始, 经过累次的附加各维胞腔的运算得到.

注意, 最初的那个点组也可以看作是零维胞腔空间.

注 对于有无穷多个胞腔的胞腔空间, 我们要求它在每一个维数只有有限个胞腔.

定义 2 称胞腔空间 X 为*胞腔复形*是说, 每次都是把胞腔附加到更低维的胞腔上.

称所有 X 的维数 $k \leqslant n$ 的所有胞腔的并集为复形 X 的 n维胞腔骨架, 以 X_n 表示. 我们得到胞腔骨架的包含系列:

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X. \tag{5}$$

注 单纯复形是胞腔复形的特殊情形. 单纯复形的 n 维骨架是它的维数直到 n 的单形集合.

定理 1 任意一个胞腔空间都同伦等价于一个胞腔复形.

证明 只需证明球面 S^k 到胞腔复形 Y 的任一个映射都同伦于 S^k 到 k 维骨架 Y_k 的映射即可. 于是, 根据引理 1, 每次附加胞腔的结果都应同伦等价于胞腔复形.

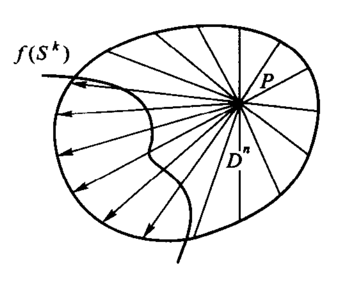


图 22

设 Y 为胞腔复形, $f: S^k \to Y$ 为一个映射. 在映射 f 下球面 S^k 的像只交于有限个胞腔. 如果像 $f(S^k)$ 交于某个胞腔 $D^n(n > k)$ 的内部, 那么像的这部分可以被移动到 D^n 的边缘上. 事实上, 映射 f 在原像 $f^{-1}(D_k)$ 中胞腔内点原像的限制可以同伦于一个光滑映射 (参看 [1], 卷 II, §12). 从而由萨德 (Sard) 定理知道, 这个光滑映射的像至少不含有 D^n 中的一个内点 P. 从点 P 将 $D^n \setminus \{P\}$ 投射到其边界上, 我们便因而得到像 $f(S^k)$ 在边缘, 即在骨架 Y_{n-1} 上 (见图 22).

重复上面对大于 k 的情形的讨论, 我们最终把像 $f(S^k)$ 压缩到了复形 Y 的骨架 Y_k 上. 定理得证. □

定义 3 称胞腔复形间的映射 $f: X \to Y$ 为胞腔映射是说, 它将复形 X 的 k 维骨架 X_k 映到复形 Y 的 k 维骨架 Y_k 中, 其中 k 为任何整数.

定理 2 胞腔复形间的任一连续映射同伦于一个胞腔映射.

证明 这个被称之为 "胞腔逼近" 的定理的证明完全类似定理 1 的证明, 我们将其作为习题留给读者. □

设 X 为胞腔复形; 设 X_{k-1} 和 X_{k-2} 分别为其 $(k-1)$ 维和 $(k-2)$ 维骨架. 我们注意到, 空间 X_{k-1}/X_{k-2} 中, X_{k-2} 恒同于一个点, 因而它是一个 $k-1$ 维球面束 (每个胞腔 D^{k-1} 对应一个球面). 附加一个 k 维胞腔 (D^k, f) 相应有一个球面 S^{k-1} 到 $(k-1)$ 维球面束的映射

$$S^{k-1} \xrightarrow{f} X_{k-1} \longrightarrow X_{k-1}/X_{k-2}. \tag{6}$$

设 $\sigma^k = (D^k, f), \sigma_i^{k-1} = (D^{k-1}, f_i)$ 分别为 k 维和 $k-1$ 维的胞腔. 我们定

义胞腔偶对 σ^k 和 σ_i^{k-1} 的 "关联系数" 为数 $[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}]$, 即映射 (6) 在球面束 X_{k-1}/X_{k-2} 的第 i 个分项 (球面 S_i^{k-1} 对应于胞腔 σ_i^{k-1}) 上的映射度.

现在我们来定义胞腔复形的**胞腔链复形**, 以 $C(X;G) = \sum\limits_{k\geqslant 0} C_k(X;G)$ 表示它. k **维胞腔链**是胞腔的形式线性和: $c_k = \sum\limits_i g_i\sigma_i^k$, 其中 σ_i^k 为 k 维胞腔, g_i 为任意一个阿贝尔群 G 中的元, 以加法记这个群的运算. 定义**边缘算子** ∂ 为

$$\partial\sigma^k = \sum_i [\sigma^k : \sigma_i^{k-1}]\sigma_i^{k-1}, \ \partial : C_k(X;G) \to C_{k-1}(X;G). \tag{7}$$

(∂ 线性地扩张到任意链上.)

注 1 如果 X 为单纯复形, 则此时所定义的算子 ∂ 与 §3 中定义的边缘算子一样 (请验证!).

注 2 对 $G = \mathbb{Z}$ (整系数链), 我们有到整个链群上的映射 $\alpha : \pi_k(X_k, X_{k-1}) \to C_k(X, \mathbb{Z})$.

引理 2 $\partial\partial = 0$.

证明 可以把每个胞腔 $\sigma_i^k : D^k \to X_k$ 看作是代表了相对同伦群 $\pi_k(X_k, X_{k-1})$ 中的一个元素 $[\sigma_i^k]$ (参看 [1], 卷 II, §21). 显然从其定义可知, 边缘算子 ∂ 由偶对 (X_k, X_{k-1}) 正合序列的边缘同态

$$\partial : \pi_k(X_k, X_{k-1}) \to \pi_{k-1}(X_{k-1}) \tag{8}$$

和同态 $j : \pi_{k-1}(X_{k-1}) \to \pi_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2})$ 生成 (见 [1], 卷 II, §21). 对于作为 $C_k(X, \mathbb{Z})$ 中链, 对 σ_i^k 我们有

$$\partial(\sigma_i^k) = \alpha(j\partial[\sigma_i^k]) \in C_{k-1}(X, \mathbb{Z}). \tag{9}$$

由于 $\partial j \equiv 0$, 故对整系数链我们有 $\partial\partial = 0$. 胞腔 σ_i^k 也给出了具任意系数群 G 的链的基, 从而引理得证. □

现在可以按通常的方式来给出胞腔链复形的同调和上同调群了. 于是, 我们得到了胞腔同调和上同调群. 对于单纯复形, 这些同调群与单纯情形相同.

我们举出胞腔复形的例子.

例 3 球面 S^n. 我们已经知道 S^n 可由在零维胞腔 σ^0 上附加一个 n 维胞腔 σ^n 得到. 我们有 $\partial\sigma^0 = 0, \partial\sigma^n = 0$. 最后一项对所有 $n > 1$ 是显然的. 对于 $n = 1$, 胞腔 σ^1 的边缘为零维球面 S^0 (这是两个点, 它们带有不同的符号). 由此

我们得到

$$
\begin{aligned}
&H_0(S^n;G)=G, n\geqslant 1,\\
&H_n(S^n;G)=G,\\
&H_k(S^n;G)=0, k\neq 0,n.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

如果有 q 个球面 $S^n_{(j)}$ 的束, $n\geqslant 1, j=1,2,\cdots,q$, 它们在一个点上相连, 于是有了一个顶点 σ^0 和 q 个 n 维胞腔 $\sigma^n_1,\cdots,\sigma^n_q$, 且 $\partial\sigma^n_i=0$. 可由在欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中去掉一个 q 个点的点组得到的区域收缩成这个球面束. 我们以 K^n_q 表示这个束, 有下面结果:

$$
\begin{aligned}
&H_0(K^n_q;G)=G,\\
&H_n(K^n_q;G)=G+G+\cdots+G\ (q\ 项)\\
&H_l(K^n_q;G)=0,\ l\neq 0,n.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

例 4 环面的胞腔剖分. 我们有: $\sigma^0,\sigma^1_1,\sigma^1_2,\sigma^2$ (参看图 23), 又, $\partial\sigma^0=\partial\sigma^1_1=\partial\sigma^1_2=\partial\sigma^2=0$;

$$
H_0(T^2)=G,\ H_1(T^2)=G+G,\ H_2(T^2)=G. \tag{12}
$$

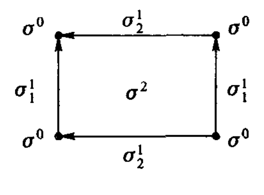


图 23 环面

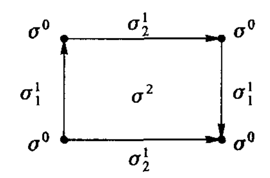


图 24 克莱因瓶 K^2

例 5 克莱因瓶有下面这些胞腔: $\sigma^0,\sigma^1_1,\sigma^1_2,\sigma^2$ (参看图 24), 又有 $\partial\sigma^0=\partial\sigma^1_1=\partial\sigma^1_2=0, \partial\sigma^2=2\sigma^1$,

$$
H_0(K^2;\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\ H_2(K^2,\mathbb{Z})=0,\ H_1(K^2;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2;\ H_2(K^2,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2. \tag{13}
$$

例 6 射影平面 $\mathbb{R}P^2$. 这时有三个胞腔: $\sigma^0,\sigma^1,\sigma^2;\partial\sigma^0=\partial\sigma^1=0,\partial\sigma^2=2\sigma^1$ (参看图 25),

$$
H_0(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\ H_1(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_2,\ H_2(\mathbb{R}P^2,\mathbb{Z})=0. \tag{14}
$$

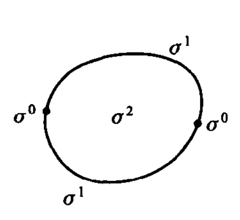


图 25 射影平面

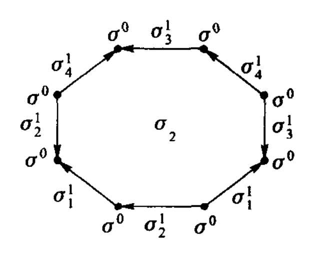


图 26 双环面

例 7 亏格 g 的定向曲面: 它有 $4g$ 个角 (见图 26, $g=2$). 胞腔为 $\sigma^0, \sigma_1^1, \cdots, \sigma_{2g}^1, \sigma^2$. 所有胞腔的边缘均为零. 我们有同调群 $(G=\mathbb{Z})$: $H_0=\mathbb{Z}, H_1=\mathbb{Z}+\cdots+\mathbb{Z}$ ($2g$ 项).

例 8 射影空间 $\mathbb{R}P^n$. 我们在前面看到 $\mathbb{R}P^n = D^n \bigcup\limits_{f_n} \mathbb{R}P^{n-1}$, 其中 $f_n : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ 为标准覆叠. 在每个维数 k, 我们得到了一个胞腔 $\sigma^k = (D_k, f_k)$: $\sigma^0, \cdots, \sigma^n$. 我们来证明 $\partial\sigma^{2k+1}=0, \partial\sigma^{2k}=2\sigma^{2k-1}$. 胞腔 σ^{m+1} 的边缘 S^m 映到这个射影空间的 m 维骨架, 这是标准覆叠 $S^m \to \mathbb{R}P^m$. 因此, 需要计算映射

$$S^m \to \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^m/\mathbb{R}P^{m-1} = S^m \tag{15}$$

的次数. 这个映射显示在图 27 中. 它是 S^m 到 S^m 的两个映射 (在群 $\pi_m(S^m)$ 的意义下) 的和. 在 m 为奇数的情形, 这两个映射都有次数 $+1$. 故而 $\partial\sigma^{m+1} = 2\sigma^m$. 在 m 为偶数情形, 这两个映射的次数的符号相反, 从而 $\partial\sigma^{m+1}=0$.

因此, 我们对 $G=\mathbb{Z}$ 和 $G=\mathbb{Z}_2$ 得到射影空间的同调群为:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} &H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}, H_n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n=2k, \\ \mathbb{Z}, & n=2k+1, \end{cases} \\ &H_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & k=2l, \\ \mathbb{Z}_2, & k=2l+1, 0<k<n. \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\text{b)}\quad H_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2, k=0,1,\cdots,n. \tag{17}$$

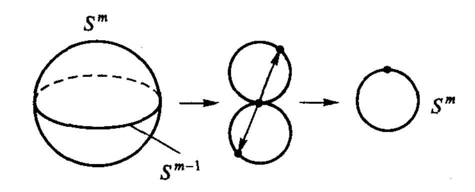


图 27

例 9 复射影空间 $\mathbb{C}P^n$. 设 $(z_0,\cdots,z_n)$ 为 $\mathbb{C}P^n$ 中的齐次坐标. 方程 $z_0=0$ 定义了 $\mathbb{C}P^n$ 中的同构于 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 的子流形. 差集 $\mathbb{C}P^n\setminus\mathbb{C}P^{n-1}$ 是 n 维复空间 $\mathbb{C}^n$ (具坐标 $z_1/z_0,\cdots,z_n/z_0$). 因此差 $\mathbb{C}P^n\setminus\mathbb{C}P^{n-1}$ 定义了 $2n$ 维胞腔 σ^{2n}. 继续这个过程, 我们便得到复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 的一个剖分, 把它分成了偶数维的胞腔 $\sigma^0,\sigma^2,\cdots,\sigma^{2n}$. 显然, 所有的边缘都为零. 因此 $H_{2k}(\mathbb{C}P^n;G)=G,0\leqslant k\leqslant n, H_{2k+1}(\mathbb{C}P^n,G)=0$.

胞腔复形对于同伦群的计算用起来也很方便. 我们回忆一下: 称空间 X 为 n- 连通是说其为道路连通, 且对 $i\leqslant n$, 所有群 $\pi_i(X)=0$.

定理 3 任意 n- 连通的胞腔复形 K 同伦等价于一个胞腔复形 $\widetilde{K}$, 它具有唯一的顶点 σ^0, 并且没有 $1,2,\cdots,n$ 维的胞腔.

在我们进行定理证明之前, 先选取两个例子.

例 10 设 $n=0$. 道路连通的复形 K 可以按下面方式化为单顶点的 $\widetilde{K}$: 如果有一条边 σ_i^1 (1 维胞腔), 其边缘 $\partial\sigma_i^1=\sigma_{1i}^0\bigcup\sigma_{2i}^0$ 由两个不同的顶点 $\sigma_{1i}^0\neq\sigma_{2i}^0$ 组成, 那么我们作等化空间 (商空间), 即把边 σ_i^1 收缩为一个点 $\widetilde{\sigma}_{1i}^0=\widetilde{\sigma}_{2i}^0$, 并将其作为顶点. 其余的胞腔则不变. 于是得到了一个新的复形 K', 它的顶点数减少了. 把这个变换一直进行下去直到化为单个顶点的复形. 复形 K 和 K' 同伦等价 (我们将在后面证明). 最后我们得到了具一个顶点 $\widetilde{\sigma}^0$ 的复形 $\widetilde{K}$, 以及一维胞腔 $\widetilde{\sigma}_i^1$, 二维胞腔 $\widetilde{\sigma}_i^2$. 一维骨架 $\widetilde{K}_1$ 为圆 $\widetilde{\sigma}_i^1$ 的束: $\widetilde{K}_1=S_1^1\vee\cdots\vee S_N^1$, 其中 N 为一维胞腔 $\widetilde{\sigma}_i^1$ 的个数, $i=1,\cdots,N$. $\pi_1(\widetilde{K}_1)$ 便是由 $\{\widetilde{\sigma}_i^1\}=a_i$ 自由生成的群 (参看 [1], 卷 II, §19). 胞腔 $\widetilde{\sigma}_i^2$ 以其边缘上的映射 $S_j^1=\partial\widetilde{\sigma}_j^2\to\widetilde{K}_1$ 附加到 $\widetilde{K}_1$ 上, 其中的这个附加映射给出了由 $a_1,\cdots,a_N$ 生成的自由群 $\pi_1(\widetilde{K}_1)$ 中的某个元 V_j. 群 $\pi_1(K)$ 由同样的生成元 $a_1,\cdots,a_N$ 及关系 $V_j=1$ 给出, 其中对复形 $\widetilde{K}$ 中每个 2 维胞腔 $\widetilde{\sigma}_j^2$ 对应了一个关系 $V_j=1$ ($\widetilde{K}$ 只具一个顶点). 转而讨论群 $H_1(K;\mathbb{Z})$; 我们得到有基闭链 $[a_1],\cdots,[a_N]$ 和关系 $V_j=0$ (写为加法) 的阿贝尔群. 于是这恰恰是 [1], 卷 II, §19 给出的同调群的定义 $H_1(K;\mathbb{Z})=\pi_1(K)/[\pi_1(K),\pi_1(K)]$.

例 11 如果 $n>0$, 则群 $H_{n+1}(\widetilde{K};\mathbb{Z})$ 与 $\pi_{n+1}(\widetilde{K})$ 同构. 它们有同一组生成元 a_i, 即 $\widetilde{K}$ 中的 $(n+1)$ 维胞腔 $\widetilde{\sigma}_i^{n+1}(i=1,\cdots,N)$ 以及由 $n+2$ 维胞腔 $\widetilde{\sigma}_j^{n+2}$ 的边界得到的相同的关系. 我们有:

推论 (胡列维茨 (Hurewicz) 定理) 对于 n- 连通胞腔复形 $(n>0)K$ 有等式 $\pi_{n+1}(K)=H_{n+1}(K;\mathbb{Z})$.

证明 由定理 2, 每个 $n+1$ 维球面到胞腔复形 K 的映射同伦于它到 K 的 $n+1$ 维骨架的一个映射. 因此, 任意这样的映射可表示为 K 中胞腔 σ_i^{n+1} 的整系数的线性组合 $(i=1,\cdots,N)$. 每个在群 $\pi_{n+1}(K)$ 中的关系式 $\sum\limits_i\lambda_i\sigma_i^{n+1}\sim0$

都是圆盘 D^{n+2} 在复形 K 中的映射, 使这个映射限制在其边缘 S^{n+1} 是线性组合 $\sum\limits_i \lambda_i\sigma_i^{n+1}$.

这样的映射同伦于如下映射: 它把 D^{n+2} 映到 $n+2$ 维的骨架并使此同伦在边缘 S^{n+1} 上为常值 (其证明完全与定理 1 的证明相类似). 因此每个形如 "$\sum \lambda_i\sigma_i^{n+1}$ 同伦于零" 的在群 $\pi_{n+1}(K)$ 的关系等价于在群 $H_{n+1}(K;\mathbb{Z})$ 中的关系 "$\sum \lambda_i\sigma_i^{n+1}$ 同调于零的关系". 引理得证. □

习题 1 证明逆命题: 设 K 为连通的单连通胞腔复形. 如果 $H_k(K;\mathbb{Z}) = 0, 0 < k < n$, 则对相同的 k 有 $\pi_k(K) = 0$, 并且 $\pi_n(K) = H_n(K;\mathbb{Z})$.

定理 3 的证明 固定一个顶点 σ^0; 以道路 γ_i 连接它与所有其他的顶点 σ_i^0. 不妨假设这些道路全都在胞腔复形 K 的 1 维骨架中. 我们把半圆盘按每个道路 γ_i 附加到复形 K 上, 得到了一个新的胞腔复形 $\widehat{K}$. 这个胞腔复形除了包含了 K 外, 还包含了胞腔 σ_i^1 和 σ_i^2 (见图 28). 由于这些 σ_i^1 的内部互不相交, 故而它们的并在 $\widehat{K}$ 中收缩到点 σ^0. 就是说, 商空间 $\widetilde{K} = \widehat{K}/\bigcup\limits_i \sigma_i^1$ 这个由所有胞腔 σ_i^1 收缩到 σ^0 得到的复形, 同伦等价于 $\widehat{K}$. 另一方面, 复形 $\widehat{K}$ 又收缩到 K (半圆盘沿半径收缩), 从而 $K \sim \widehat{K} \sim \widetilde{K}$. 复形 $\widetilde{K}$ 只有一个零维的胞腔 (即顶点).

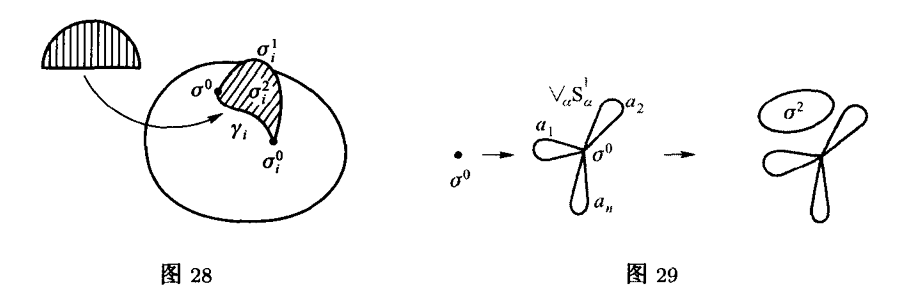


图 28　　　　图 29

以后我们假设复形 K 只有一个顶点, 并且已经不再包含 $1, 2, \cdots, k-1, k < n$ 维的胞腔. 于是 K 的 k 维骨架是一个 k 维球面 S_i^k 束. 由于 n- 连通性, 每个球面 S_i^k 同伦于 0, 故而它可以用圆盘 D_i^{k+1} 粘合上去 (不妨设圆盘 D_i^{k+1} 在复形 K 的 $(k+1)$ 维骨架中). 我们用圆盘 D_i^{k+1} 附加 D^{k+2} 到 K 上 (这里的 D_i^{k+1} 看作是 D^{k+2} 边缘的一半). 于是我们得到了同伦等价于 K 的复形 $\widehat{K}$, 它包含了在 K 的 k 维胞腔之外的一对额外的胞腔 σ_i^{k+1} 和 σ_i^{k+2}. 胞腔 σ_i^{k+1} 的并在 $\widehat{K}$ 中收缩, 因此 $\widetilde{K} = \widehat{K}/\bigcup\limits_i \sigma_i^{k+1} \sim \widehat{K} \sim K$. 复形 $\widetilde{K}$ 同伦等价于 K, 并且没有维数等于 $1, 2, \cdots, k-1, k$ 的胞腔. 定理 3 得证. □

§3 的闭曲面分类定理让我们可以得到 M^2 的胞腔并的标准表示: $M^2 = \sigma^0 \bigcup (\bigcup\limits_\alpha \sigma_\alpha^1) \bigcup \sigma^2$, 其中 σ^0 为点, 在其上附加了圆束 $\bigvee\limits_\alpha S_\alpha^1$, 然后对应于字 W, 附加圆盘 D^2 (二维胞腔 σ^2) 于这个圆束上 (见图 29).

图 30 给出了 $g=1$ 时 M_g^2 的特殊情形.

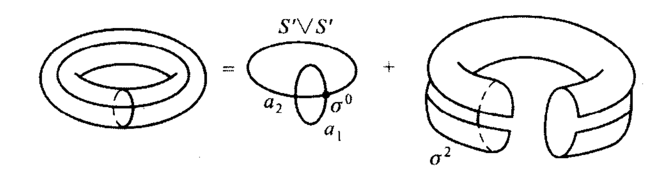


图 30

因此, 圆周可以标以字母 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (对于 $M_g^2, n=2g$, 对于 $M_\mu^2, n=\mu$), 而基本多边形 W 可以等同于二维胞腔 σ^2. 因为群 $\pi_1\left(\bigvee_{\alpha=1}^{n} S_\alpha^1\right)$ 由 $a_1, \cdots, a_n$ 自由生成, 于是按字码 $W=a_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots a_{i_n}^{\varepsilon_n}$ 的附加胞腔 σ^2 给出了 $\pi_1(M^2)$ 中一个唯一确定的关系.

这样, 基本群 $\pi_1(M^2)$ 便有了下面的生成元和关系的表示:

$$\pi_1(M^2)=\begin{cases}1 & \text{对 } S^2;\\ a_1,b_1,\cdots,a_g,b_g; W=a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}=1 & \text{对 } M_g^2;\\ a_1,\cdots,a_\mu; W=a_1^2a_2^2\cdots a_\mu^2=1 & \text{对 } M_\mu^2.\end{cases} \tag{18}$$

习题 2 证明下列群的同构, 这些群对应于 $\pi_1(M^2)$ 的不同表示:

1\. a) $a_1,b_1,\cdots,a_g,b_g; W=a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

b) $\bar a_1,\bar b_1,\cdots,\bar a_g,\bar b_g; \overline{W}=\bar a_1\cdots\bar a_g\bar b_1\cdots\bar b_g\bar a_1^{-1}\bar b_1^{-1}\cdots\bar a_g^{-1}\bar b_g^{-1}$.

2\. a) $a_1,\cdots,a_\mu; W=a_1^2\cdots a_\mu^2$.

b) $\bar a_1,\bar b_1,\cdots,\bar a_k,\bar b_k; \overline{W}=\bar a_1\bar b_1\bar a_1^{-1}\bar b_1\cdots\bar a_k\bar b_k\bar a_k^{-1}\bar b_k, k=\mu/2$, μ 为偶数.

c) μ 任意; $\bar{\bar a}_1,\cdots,\bar{\bar a}_\mu; \overline{\overline{W}}=\bar{\bar a}_1\cdots\bar{\bar a}_\mu\bar{\bar a}_1^{-1}\cdots\bar{\bar a}_{\mu-1}\bar{\bar a}_\mu^{-1}$.

习题 3 证明, 对不同的曲面, 群 $\pi_1(M^2)$ (甚至 $H_1(M^2)=\pi_1/[\pi_1,\pi_1]$) 不同构.

习题 4 给出所有二维光滑连通曲面 (非紧的) 的分类.

习题 5 证明二维定向光滑连通流形 M^2 (开的或具边缘的) 可实现为平面区域的充要条件是它的任意两个一维闭链的相交指数为零. (平面的二维流形为自然定向的.)

习题 6 为了使开的二维流形 M^2 同胚于一个紧闭二维流形中的开区域, 其充要条件是群 $H_1(M^2;\mathbb{Z})$ (或 $\pi_1(M^2)$) 有有限个生成元. 请证明.

习题 7 证明任意开连通二维流形 M^2 具有自由的基本群, 并且这样的流形 M^2 同伦等价于或者是有限圆束 $\bigvee_{i=1}^{k} S_i^1 (k<\infty)$, 或者是无限圆束 $\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i^1$.

注 在任一个紧连通光滑的闭二维流形上都可以引进具常曲率的黎曼度量. 在球面 S^2 和射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 上可引进具常值正曲率的度量 (这是显然的论断); 在环面和克莱因瓶上可以引进零曲率的度量. 在环面上这种度量的存在性可由表示 $T^2=\mathbb{R}^2/\Gamma$ 得到, 这里的群 $\Gamma=\mathbb{Z}(a)\otimes\mathbb{Z}(b)$ 由两个 $\mathbb{R}^2$ 中的平移 a 和 b 生成. 显然, 群 Γ 表示了欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 的同构. 类似情形在克莱因瓶情形下也成立. 它也可用 $\mathbb{R}^2/\Gamma$ 表示, 其中的运动群 Γ 由变换

$$T_1(x,y)=(x,y+1),\quad T_2(x,y)=\left(x+\frac{1}{2},-y\right)$$

生成, 其相关的关系是 $T_2^{-1}T_1T_2T_1=1$.

可以在所有其他剩下的二维流形 (连通的紧光滑闭的) 上引进有负的常曲率的黎曼度量. 对这些流形 M^2 存在表示: $M^2=L_2/\Gamma$, 其中 L_2 为罗巴切夫斯基平面 (因而给出了具常负曲率的度量), Γ 为同构于 $\pi_1(M^2)$ 的群, 等距地 (运动) 作用于 L_2 (参看 [**1**], 卷 II, §20).

我们要对前面引进的附加环柄和附加默比乌斯带的运算做些有益的补充. 这些运算原来是某种更一般的运算的特殊情形, 这个更一般的运算就是被称为 "两个同维流形的连通和". 我们来较详细地描述这个运算.

设 M_1^n 和 M_2^n 为两个同维光滑的流形. 把流形 M_1^n 和 M_2^n 都嵌入到欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中, 其中 N 足够大, 并且我们在 $\mathbb{R}^N$ 中安排 M_1^n 和 M_2^n 使得点 $x\in M_1^n$ 和 $y\in M_2^n$ 给出相互的距离为 ε, 其中 $\varepsilon>0$ 充分小, 同时它们的切平面 T_x 和 T_y 相互平行. 于是可以假定 M_1^n 和 M_2^n 在 $\mathbb{R}^N$ 中互不相交, 例如, 它们各自位于超平面 $\mathbb{R}^{N-1}\subset\mathbb{R}^N$ 的两侧 (图 31).

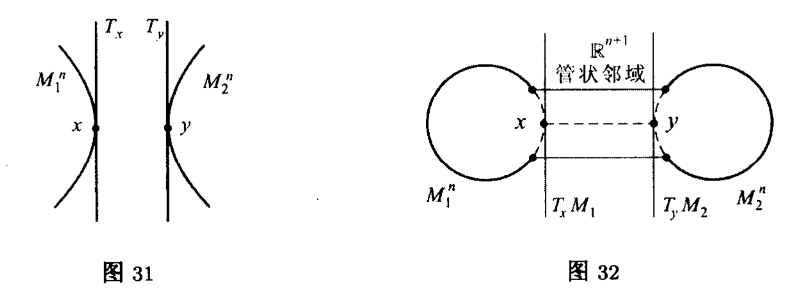


图 31　　　　图 32

由于切平面 T_x 和 T_y 的平行性, 这两个 n 维平面可以包含在 $(n+1)$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}\subset\mathbb{R}^N$ 中, 也可以假定在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中连接点 x 和 y 的线段 $[x,y]$ 在点 x 垂直于 T_x, 而在 y 点垂直于 T_y. 现在可以考虑一个以 $[x,y]$ 为轴的具充分小

半径 $\varepsilon > 0$ 的圆柱, 其底面即球面 S^{n-1} 各在 T_x 和 T_y 之中 (球心为点 x 和 y). 我们来构造一个新的 n 维流形 (以 $M_1^n \# M_2^n$ 表示): 从 M_1^n 和 M_2^n 中分别切去以 x 和 y 为中心, 以 ε 为半径的两个圆盘, 并连接所得到的 $n-1$ 维球面, 构造出上面那样的圆柱 (见图 32).

我们注意到, 所得到流形 $M_1^n \# M_2^n$ (其中 M_1^n 和 M_2^n 连通) 在下述意义下唯一确定: 当将点 x, y 变换为另外的点 $x' \in M_1^n$ 和 $y' \in M_2^n$ 时, 流形 $M_1^n \# M_2^n$ 的变化是微分同胚的. 容易看出, 运算 $\#$ 是可结合的: $(M \# N) \# Q \approx M \# (N \# Q)$ (微分同胚). 此外, 运算 $\#$ 是可交换的.

现在以取连通和的观点考虑以前引进的附加环柄和默比乌斯带的运算. 显然, 附加标准的环柄 $aba^{-1}b^{-1}$ 等价于对原来的流形 M^2 和环面 T^2 取连通和. 另外, 附加默比乌斯带的运算等价于对原来的流形 M^2 和射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和 (见图 33).

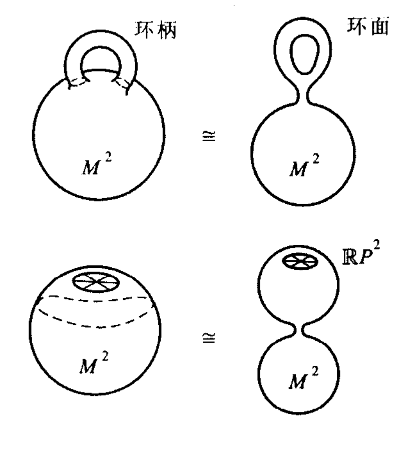


图 33

容易看出, $M^2 \# S^2 \approx M^2$ (微分同胚); $M_{g_1}^2 \# M_{g_2}^2 \approx M_{g_1+g_2}^2$; $M_{\mu_1}^2 \# M_{\mu_2}^2 \approx M_{\mu_1+\mu_2}^2$; $M^2 \# M_{g=1}^2 \# M_{\mu=1}^2 \approx M^2 \# M_{\mu=3}^2$.

那么, 譬如克莱因瓶为两个射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和 (参看前面).

因此, 所有二维流形 M^2 的微分同胚等价类的集合 (假定流形是紧闭连通的) 转化为具有两个生成元的阿贝尔半群 $P: a$ (环面 T^2) 和 b (射影平面 $\mathbb{R}P^2$), 其间只有一个关系 $a\#b = b\#b\#b$ (请证明没有其他的关系). 起着半群 P 的零元作用的是二维球面.

利用上面得到的曲面的胞腔剖分, 较容易计算出所有二维闭曲面的同调群和基本群.

1. **球面 S^2**　其同调群已经算过: $H_0(S^2;\mathbb{Z}) = H_2(S^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_1 = 0$. 另外, 我们已知 $\pi_1(S^2) = 0, \pi_2(S^2) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

2. **定向曲面 M_g^2**　由定向性我们有 $H_2(M_g^2;\mathbb{Z}) = H_0(M_g^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. 这时的基本群给出了 $2g$ 个生成元 $a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g$, 关系为 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1$. 在交换群 $H_1(M_g^2;\mathbb{Z}) = \pi_1/[\pi_1,\pi_1]$ 中这个关系消失从而得到 $H_1(M_g^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \cdots + \mathbb{Z}$ ($2g$ 项).

3. **非定向曲面 M_μ^2**　由非定向 (见 §3) 知 $H_0(M_\mu^2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_2(M_\mu^2,\mathbb{Z}) = 0$. 基本群 $\pi_1(M_\mu^2)$ 由 μ 个元 $a_1, \cdots, a_\mu$ 生成, 关系为 $a_1^2a_2^2\cdots a_\mu^2 = 1$. 同调群 $H_1(M_\mu^2;\mathbb{Z}) = \pi_1/[\pi_1,\pi_1]$ 由 $a_1, \cdots, a_\mu$ 生成并可交换, 关系为 $2(a_1 + \cdots + a_\mu) = 0$.

因此 $H_1(M_\mu^2;\mathbb{Z})=\underbrace{\mathbb{Z}_1+\cdots+\mathbb{Z}_1}_{\mu-1}+\mathbb{Z}_2$, 其中生成 $\mathbb{Z}$ 的是 $a_1,\cdots,a_{\mu-1}$; 生成群 $\mathbb{Z}_2$ 的是 $a_1+\cdots+a_\mu$.

现在考虑被称做 "透镜空间" 的复形 L_p, 它由球面 $S^3:|z_1|^2+|z_2|^2=1$ 在群 $\mathbb{Z}_p$ 作用下的商空间:

$$(z_1,z_2)\sim(z_1\mathrm{e}^{2\pi i/p},z_2\mathrm{e}^{2\pi i/p}). \tag{19}$$

在 $p=2$ 时我们得到 3 维射影空间 $\mathbb{R}P^3$.

为了构造透镜空间 L_p 的胞腔剖分, 我们先按后面的方式分割 S^3: 设 $q=0,\cdots,p-1$. 胞腔 σ_q^3 为那些点 (z_1,z_2), 其中 $z_2=\rho\mathrm{e}^{i\varphi},\rho>0,\dfrac{2\pi q}{p}<\varphi<\dfrac{2\pi(q+1)}{p}$; σ_q^2 为点 (z_1,z_2), 其中 $z_2=\rho\mathrm{e}^{i\varphi},\rho>0,\varphi=\dfrac{2\pi q}{p}$; σ_q^1 为点 $(z_1,0)$, 其中 $z_1=\mathrm{e}^{i\varphi},\dfrac{2\pi q}{p}<\varphi<\dfrac{2\pi(q+1)}{p}$; σ_q^0 为点 $(\mathrm{e}^{2\pi iq/p},0)$.

图 34 展示了这个胞腔剖分, 其中 S^3 等同于以无穷远点紧化的三维空间 $(p=3)$.

在赋以这些胞腔以定向时, 我们有

$$\begin{aligned}&\partial\sigma_q^3=\sigma_{q+1}^2-\sigma_q^2,\partial\sigma_q^2=\sigma_0^1+\cdots+\sigma_p^1,\\&\partial\sigma_q^1=\sigma_{q+1}^0-\sigma_q^0.\end{aligned} \tag{20}$$

(这里的 $q+1$ 为模 p 约化.) 在以群 $\mathbb{Z}_p$ 作用进行等化之后, $\sigma_q^3,\sigma_q^2,\sigma_q^1,\sigma_q^0$ 各自把不同的 q 粘合为一个. 于是我们得到了 L_p 的胞腔剖分, 它由四个胞腔 $\sigma^3,\sigma^2,\sigma^1,\sigma^0$ 组成, 并由公式 (20) 得出 $\partial\sigma^3=0,\partial\sigma^2=p\sigma^1,\partial\sigma^1=0$.

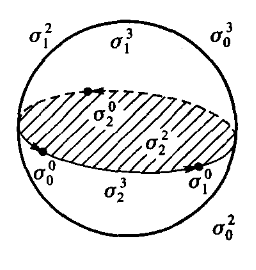


图 34

于是有

$$H_3(L_p;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}=H_0(L_p;\mathbb{Z}),H_2(L_p;\mathbb{Z})=0,H_1(L_p;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_p. \tag{21}$$

对于系数群 $\mathbb{Z}_p$ 我们则有

$$H_i(L_p;\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p,\quad i=0,1,2,3,\cdots. \tag{22}$$

习题 8 求上同调群 $H^i(L_p;\mathbb{Z})$.

称球面 S^{2n-1} 在群 $\mathbb{Z}_m$ 作用下的商空间为 $2n-1$ 维广义的透镜流形, 这里生成元的作用是

$$(z_1,\cdots,z_n)\longmapsto\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{m}}z_1,\mathrm{e}^{\frac{2\pi iq_1}{m}}z_2,\cdots,\mathrm{e}^{\frac{2\pi iq_{n-1}}{m}}z_n\right). \tag{23}$$

这时所有的数 $q_1, \cdots, q_{n-1}$ 应与 m 互素, 从而使这个商空间为流形 (请验证!). 这个流形被记为

$$S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m = L^{2n-1}(q_1, \cdots, q_{n-1}). \tag{24}$$

显然, $\pi_1(L^{2n-1}) = \mathbb{Z}_m$.

习题 9 在球面 S^{2n-1} 上构造一个胞腔剖分, 使得对任一个群 $\mathbb{Z}_m$ 的作用都把胞腔自由地转移到胞腔 (即生成了透镜空间的胞腔剖分). 计算透镜流形的同调群.

习题 10 证明对 $q_1 = q_2 = \cdots = q_{n-1} = 1$ 的透镜空间是个光滑纤维丛, 其底空间为 $\mathbb{C}P^{n-1}$, 纤维为圆周 S^1:

$$L^{2n-1}(1, \cdots, 1) \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^{n-1}, \ F = S^1. \tag{25}$$

习题 11 计算透镜空间的上同调环 (系数在群 $G = \mathbb{Z}_m$ 中).

对各种光滑纤维丛进行胞腔剖分也颇有意思. 在这里我们考虑最简单的情形. 即纤维 F 为球面 S^{n-1}, 它被剖分为胞腔 $S^{n-1} = \sigma_F^0 \bigcup \sigma_F^{n-1}$. 具线性群结构的流形 (在这里具体指的是它上面的单位切向量丛) 是重要的例子:

$$M^{2n-1} \xrightarrow{p} M^n, \ \text{纤维}\ F = S^{n-1}.$$

如果 M^n 已剖分为胞腔 σ_j^q, 则在纤维丛 M^{2n-1} 中的胞腔由条件

$$p^{-1}(\sigma_j^q) = \sigma_j^q \times F = \sigma_j^q \times (\sigma_F^0 \bigcup \sigma_F^{n-1}), \tag{26}$$

这是因为在圆盘上的纤维丛是平凡的 (即为直积)(参看 [1], 卷 II, §24). 因此 M^{2n-1} 中的胞腔为

$$\sigma_j^q \times \sigma_F^0, \quad \sigma_j^q \times \sigma_F^{n-1}, \tag{27}$$

其中 σ_j^q 为底流形 M^n 的任意 q 维胞腔. 但是对这些胞腔进行边缘算子的计算有些困难. 作为例子我们考虑对闭曲面 M_g^2 上的单位切丛空间 M^3, 其中亏格 $g > 0$, 且有标准的胞腔剖分 (见前面内容):

$$M_g^2 = \sigma^0 \bigcup \{\sigma_j^1, j = 1, \cdots, 2g\} \bigcup \sigma^2. \tag{28}$$

在空间 M^3 上我们得到了 $0, 1, 2, 3$ 维的胞腔

$$\begin{gathered} \sigma^0 \times \sigma_F^0, \ \sigma_j^1 \times \sigma_F^0, \ \sigma^2 \times \sigma_F^0, \\ \sigma^0 \times \sigma_F^1, \ \sigma_j^1 \times \sigma_F^1, \ \sigma^2 \times \sigma_F^1. \end{gathered} \tag{29}$$

只有一个顶点 $\sigma^0 \times \sigma_F^0$, 所有一维胞腔都是闭链. 流形 M^3 是定向的. 因此三维胞腔 $\sigma^2 \times \sigma_F^1$ 为闭链. 请验证一下, 在纤维中胞腔 $\sigma_j^1 \times \sigma_F^1$ 也是同调闭链; 但是

在 $\pi_1(M^3)$ 中边缘 $\partial(\sigma_j^1 \times \sigma_F^1)$ 给出了道路 σ_j^1 和 σ_F^1 的换位子. 胞腔 $\sigma^2 \times \sigma_F^0$ 已知不是闭链. 有公式

$$\partial(\sigma^2 \times \sigma_F^0) = [(\partial\sigma^2) \times \sigma_F^0] \bigcup [\sigma^0 \times (\sigma_F^1)^{2-2g}]. \tag{30}$$

记号 $(\sigma_F^1)^{2-2g}$ 表示在胞腔 $\sigma^2 \times \sigma_F^0$ 的边缘中一维闭链 σ_F^1 进入, 穿出了 $2-2g$ 次 (以恰当的定向). 我们在选取 M_g^2 的一个剖分后, 对于 $\partial\sigma^2$ 我们有

$$\partial\sigma^2 = \prod_{i=1}^{g}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = W(a,b), \tag{31}$$

其中道路 a_i 代表了胞腔 σ_i^1, 而道路 b_i 则是基空间 M_g^2 的胞腔 σ_{g+i}^1.

习题 12 利用 M_g^2 上正好具有 $2-2g$ 次的一个奇点的向量场证明对胞腔 $\sigma^2 \times \sigma_F^0$ 边缘的公式 (30)(参看 [1], 卷 II, §15).

对于群 $\pi_1(M^3)$, 它有生成元 $a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g, \gamma$ (这里的 γ 为纤维 $F = S^1$) 和关系

$$[a_i, \gamma] = a_i \gamma a_i^{-1} \gamma^{-1} = 1, \ [b_i, \gamma] = b_i \gamma b_i^{-1} \gamma^{-1} = 1, \tag{32}$$

$$\gamma^{2-2g} = W(a,b) = \prod_{i=1}^{g}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]. \tag{33}$$

读者可验证, 其同调群 $H_i(M^3)$ 为

$$\begin{aligned} &H_0 = \mathbb{Z}, \ H_1 = \underbrace{\mathbb{Z} + \cdots + \mathbb{Z}}_{2g\text{ 项}} + \mathbb{Z}_{2g-2} \\ &H_2 = \underbrace{\mathbb{Z} + \cdots + \mathbb{Z}}_{2g\text{ 项}}, \ H_3 = \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{34}$$

§5. 奇异同调和上同调. 它们的同伦不变性. 空间对的正合序列. 相对同调群

我们现在要讲的是同调群和上同调群的最一般的同伦不变的定义方法, 既不需要流形的结构, 也不要求单纯或胞腔复形的结构.

设 X 为任意的拓扑空间.

定义 1 称偶对 (σ^k, f) 为*奇异 k 维单形*是说, 其中 $f: \sigma^k \to X$ 是由 k 维标准单形 $\sigma = [\alpha_0 \cdots \alpha_k]$ 到空间 X 的连续映射. 称有限的形式线性组合 $c_k = \sum\limits_i g_i(\sigma_i^k, f_i)$ 为*奇异 k 维链*, 其中 g_i 为以加法记其运算的阿贝尔群 G 中元, 而 (σ_i^k, f_i) 为 k 维奇异单形.

定义 2 k 维奇异单形的边缘是形如

$$\partial(\sigma^k, f) = \sum_q (-1)^q (\sigma_q^{k-1}, f|_{\sigma_k^{k-1}})$$

的形式线性组合, 其中 $\sigma_q^{k-1} = [\alpha_0 \cdots \widehat{\alpha}_q \cdots \alpha_k]$ 为这个标准单形的第 q 个面, $f|_{\sigma_q^{k-1}}$ 为映射 f 在边缘 σ_q^{k-1} 上的限制 (奇异单形的边缘同样是奇异单形). 定义奇异链的边缘为

$$\partial c_k = \sum_i g_i \partial(\sigma_i^k, f_i).$$

由引理 3.1 得到 $\partial\partial c_k = 0$. 奇异闭链是 $\partial c_k = 0$ 的链 c_k. 奇异边缘是使 $c_k = \partial c_{k+1}$ 的链 c_k. 奇异边缘是闭链. 奇异 (单纯的) 同调群 $H_k(X;G)$ 是 k 维闭链准确到边缘的等价类.

奇异上同调群 $H^k(X;G)$ 像在 §2 中那样定义; 上链为链上的线性形式, 算子 δ 对偶于 ∂. 使用奇异同调的方便之处在于对任意空间之间的连续映射 $\varphi: X \to Y$, 诱导出的奇异同调和上同调群之间的同态 φ_*, φ^*:

$$\varphi_*: H_k(X;G) \to H_k(Y;G), \tag{1}$$

$$\varphi^*: H^k(Y;G) \to H^k(X;G) \tag{1'}$$

以显然的方式构造. 这时奇异链 $c_k = \sum g_i(\sigma_i^k, f_i)$ 转化为奇异链 $\varphi_*(c_k) = \sum g_i(\sigma_i^k, \varphi \circ f_i)$. 在上同调上则以相反的方向进行: $\varphi^*: H^k(Y;G) \to H^k(X;G)$, 其中上链 c^k 变到 $\varphi^*(c^k)$, 它的定义是 $(\varphi^*(c^k), \tilde{c}_k) = (c^k, \varphi_*(\tilde{c}_k))$. 映射 φ_* 和 φ^* 在链和上链上与边缘算子可交换, 从而在同调和上同调上有定义.

由奇异同调 (上同调) 的定义显然可以得到结论: 拓扑等价 (同胚) 的空间有相同的同调和上同调群. 我们将证明更强的命题: 奇异同调群具同伦不变性 (对于上同调, 所有的讨论类似).

定理 1 设 $\varphi_0: X \to Y, \varphi_1: X \to Y$ 为同伦的映射. 于是它们所诱导的同调群的同态 $\varphi_{0*}, \varphi_{1*}: H_k(X;G) \to H_k(Y;G)$ 相等: $\varphi_{0*} \equiv \varphi_{1*}$ (对上同调群而言, $\varphi_0^* \equiv \varphi_1^*$).

证明 设 I 为线段 $[0,1]$; Φ 为连接 φ_0 和 φ_1 的同伦:

$$\begin{aligned} &\Phi(x,t): X \times I \to Y, \\ &\Phi|_{t=0} = \varphi_0, \Phi|_{t=1} = \varphi_1, 0 \leqslant t \leqslant 1, x \in X. \end{aligned} \tag{2}$$

对于 X 的任一奇异单形 (σ, f), 可定义柱形 $\sigma \times I$ 到空间 Y 的映射

$$\Phi(f \times 1)(\sigma, t) = \Phi(f(\sigma), t): \sigma \times I \to X \times I \to Y. \tag{3}$$

我们把柱形 $\sigma \times I$ 分成单形: 如果 $\sigma = [\alpha_0 \cdots \alpha_k]$, 则柱形 $\sigma \times I$ 的顶点取为 α_i^0 (下底) 和 α_i^1 (上底). $\sigma \times I$ 的单形的形状是

$$\sigma_q = [\alpha_0^0 \cdots \alpha_q^0 \alpha_{q+1}^1 \cdots \alpha_k^1], \quad q = 0, \cdots, k \tag{4}$$

(见图 35, 这里的 $k = 1, 2$). 映射 $\Phi(f \times 1) = \widetilde{f}$ 定义了一个 $(k+1)$ 维的奇异单形链 $D(\sigma, f)$:

$$D(\sigma, f) = (-1)^{k-1} \sum_{q=0}^{k} (-1)^q (\sigma_q, \widetilde{f}). \tag{5}$$

故而我们得到了奇异链群之间的同态:

$$D : C_k(X) \to C_{k+1}(Y). \tag{6}$$

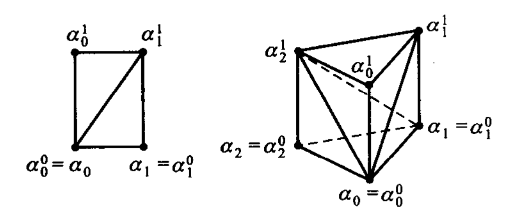


图 35 剖分柱形为单纯形

引理 1 有恒等式:

$$D \circ \partial + (-1)^{k-1} \partial \circ D = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}. \tag{7}$$

证明 以 $d[\alpha_0 \cdots \alpha_k]$ 表示形如 (4) 的单形的和:

$$d[\alpha_0 \cdots \alpha_k] = (-1)^{k-1} \sum_{q=0}^{k} (-1)^q [\alpha_0^0 \cdots \alpha_q^0 \alpha_q^1 \cdots \alpha_k^1]. \tag{8}$$

另外,

$$\partial[\alpha_0 \cdots \alpha_k] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [\alpha_0 \cdots \widehat{\alpha_i} \cdots \alpha_k]. \tag{9}$$

于是

$$d\partial[\alpha_0 \cdots \alpha_k] + (-1)^{k-1} \partial d[\alpha_0 \cdots \alpha_k] = [\alpha_0^1 \cdots \alpha_k^1] - [\alpha_0^0 \cdots \alpha_k^0]. \tag{10}$$

这个等式从几何上看是显然的: 柱形 $[\alpha_0 \cdots \alpha_k] \times I$ 的边缘由在单形边缘 $\partial[\alpha_0 \cdots \alpha_k]$ 上的柱形以及带有适当符号的上下底组成. 这个等式给出了引理的论断. □

由此引理得出 (参看 §2) 同调群的同态 $\varphi_{\alpha *} (\alpha = 0, 1)$ 相同 (对任意闭链 z_k, 我们有 $\varphi_{0*} z_k - \varphi_{1*} z_k = \partial D z_k$). 定理证完. □

推论　同伦等价的空间具有同构的奇异 (单纯) 同调 (上同调) 群.

例 1　空间 X (在自身内) 的收缩同伦等价于一个点. 我们来求一个点 ($X = *$) 的奇异同调群.

$X = \{*\}$ 的奇异 k 维单形为

$$f : \sigma^k \to \{*\}; \tag{11}$$

对每一个维数 k, 我们只有一个奇异单形 (因为映射 f 是唯一确定的). 单形 σ^k 的边缘为

$$\partial(\sigma^k) = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q (\sigma_q^{k-1}). \tag{12}$$

故而有

$$\partial(\sigma_k, f) = \begin{cases} 0, & k \text{ 为奇数或 } k = 0, \\ (\sigma^{k-1}, f), & k \text{ 为偶数}. \end{cases} \tag{13}$$

由此得到 $H_0(*; G) = G, H_k(*; G) = 0, k > 0$ (在 k 为偶数时闭链 (σ^{k-1}, f) 就是链 (σ^k, f) 的边缘链).

例 2　如果空间 X 为道路连通, 则 $H_0(X; G) = G$. 事实上, 所有的零维链都是闭链. 形如 $\sum\limits_i g_i(\sigma^0, f_i), f_i(\sigma^0) = x_i \in X$ 的链是个边缘的充要条件是 $\sum\limits_i g_i = 0$. 任意两个零维单形 (σ^0, f) 和 $(\sigma^0, g), f(\sigma^0) = x_1, g(\sigma^0) = x_2$ 都为同调等价: 如果 $\varphi : [0, 1] \to X$ 为连接点 x_1 和 x_2 的曲线, 则

$$(\sigma^0, g) - (\sigma^0, f) = \partial(\sigma^1, \varphi). \tag{14}$$

因此闭链 $\sum g_i(\sigma_0, f_i)$ 同调于闭链 $(\sum g_i)(\sigma^0, f)$. 于是 $H_0(X; G) = G$.

类似可证明, 由 n 个道路连通分支组成的空间 X, 其群 $H_0(X; G)$ 为 n 个群 G 的直和.

在有些场合, 使用奇异立方体的同调和上同调要更方便一些. 我们给出其定义.

定义 3　标准单位 n 维立方体 I^n 是 $\mathbb{R}^n$ 中那些点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的集合, 它们满足关系 $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. 如果 $n = 0$, 则 I^0 为一个单点. 立方体的边缘 $\lambda_i^\varepsilon I^n (i = 1, \cdots, n, \varepsilon = 0, 1)$ 是立方体 I^{n-1}, 其中 $x_i = \varepsilon$. 立方体 I^n 具有 $2n$ 个边缘 $\lambda_i^\varepsilon I^n$.

定义 4　空间 X 的奇异 n 维立方体是个偶对 (I^n, f), 其中 $f : I^n \to X$ 为连续映射.

奇异 n 维立方体 (I^n, f) 的边缘定义为

$$\lambda_i^\varepsilon(I^n, f) = (\lambda_i^\varepsilon I^n, f), \quad i = 1, \cdots, n, \varepsilon = 0, 1. \tag{15}$$

称它们是奇异立方体 (I^n, f) 的第 i 个下边缘 $(\varepsilon = 0)$ 和第 i 个上边缘 $(\varepsilon = 1)$. 当 $i < j$ 时有简单的等式

$$\lambda_i^\varepsilon \lambda_j^\eta = \lambda_{j-1}^\eta \lambda_i^\varepsilon, \quad \varepsilon, \eta = 0, 1. \tag{16}$$

设 $\widehat{C}_n(X; G)$ 表示系数在群 G 的 n 维奇异立方体链群, 即形如

$$c_n = \sum g_i(I^n, f_i), \ g_i \in G \tag{17}$$

的有限形式线性组合的群. 奇异立方体的边缘可写为

$$\partial(I^n, f) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [\lambda_i^1(I^{n-1}, f) - \lambda_i^0(I^{n-1}, f)]. \tag{18}$$

算子 ∂ 线性扩张到所有的链上. 由等式 (16) 可知 $\partial\partial(I^n, f) = 0$. 称奇异 n 维立方体 (I^n, f) 是**退化的**, 表示映射 $f : I^n \to X$ 可分解为它到边缘的投射 $I^n \to I^{n-1}$ 和某个映射 $g : I^{n-1} \to X$ 的复合.

退化的 n 维奇异立方体的线性组合构成了链群 $\widehat{C}_n(X; G)$ 的一个子群 $D_n(X; G)$. 因为算子 ∂ 把退化的奇异立方体变为奇异立方体, 故可以以退化奇异立方体去作商群, 定义出 "正规化" 的奇异立方体链群 $C_n(X; G)$:

$$C_n(X; G) = \widehat{C}_n(X; G)/D_n(X; G), \tag{19}$$

并定义新的边缘算子 $\partial : C_n(X; G) \to C_{n-1}(X; G)$ (仍将其以字母 ∂ 表示). 像前面一样, $\partial\partial = 0$. 故可以定义奇异立方同调群为正规化的闭链在同调于零的闭链范围内构成的群 (类似地定义上同调).

我们证明所构造的同调群也是同伦不变的.

定理 2 拓扑空间之间的同伦映射 $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ 诱导出奇异立方体同调群之间相同的同态 $\varphi_{0*}, \varphi_{1*} : H_n(X; G) \to H_n(Y; G)$, 以及奇异立方体上同调群间相同的同态: $\varphi_0^* = \varphi_1^*$.

证明 这个定理的证明完全类似于对奇异单纯情形相关定理的证明 (参看前面的内容). 必须要构造一个代数同伦算子 D, 使对在空间 X 中的每个 n 维奇异立方体给出一个空间 Y 中的 $n+1$ 维奇异立方体. 如果 $\Phi : I \times X \to Y$ 为映射 φ_0, φ_1 之间的同伦, 那么 D 定义为

$$D(I^n, f) = (I^{n+1}, \Phi(1 \times f)),$$

其中

$$I^{n+1} = I \times I^n,\ 1 \times f : I^{n+1} \to I \times X.$$

算子 D 把退化的立方体重新变为退化的 (请验证!), 所以它定义在正规化的链群上.

对等式

$$D\partial \pm \partial D = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}$$

的证明完全类似于引理 1. 像对奇异单形同调群情形那样完成整个定理的证明.

□

例 3 计算点 $X = *$ 的奇异立方体同调群 (从而任意收缩空间的同调群).

这时对每个维数 n, 我们恰好只有一个立方体 (I^n, f_n), 其中 $f_n(I^n) = *$. 当 $n > 0$ 时, 所有这些立方体都退化. 于是正规化的立方体链群为

$$C_0(X;G) = G = H_0(X;G);\ C_n(X,G) = 0, n > 0.$$

这表明, 点的立方体同调群与在上面所构造的单纯同调群是一样的.

注 如果从整个奇异立方体链群 $\widehat{C}_n(X;G)$ 构造同调群 $\widehat{H}_n(X;G)$, 则在这样的理论中, 点的同调群是非平凡的.

习题 1 a) 求群 $\widehat{H}_n(*;\mathbb{Z})$;b) 证明 $\widehat{H}_n(X;\mathbb{Z}) = \sum\limits_{k\geqslant 0} H_{n-k}(X, \widehat{H}_k(*,\mathbb{Z}))$, 其中 X 为任意空间.

我们现在来定义*相对奇异同调群*. 这时对于单纯的和对立方体的情形的定义是相同的.

设 X 为拓扑空间, Y 为其子空间. 于是奇异链群 $C_k(Y)$ 包含在群 $C_k(X)$ 中. 我们考虑相对链群 $C_k(X,Y) = C_k(X)/C_k(Y)$ (在这里我们没有显式写出系数 G, 其中 G 为任意群). 边缘算子 ∂ 将 $C_k(Y)$ 映到 $C_{k-1}(Y)$, 所以对于商群它定义了一个边缘算子 $C_k(X,Y) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X,Y)$ (仍以 ∂ 表示这个同态). 我们得到了相对链复形和对偶的上链复形.

像从前一样, 我们定义相对闭链群 $Z_k(X,Y)$ 为那些满足 $\partial C_k = 0$ 的相对链的群. 相对边缘群 $B_k(X,Y) \subset Z_k(X,Y)$ 为形如 $c_k = \partial c_{k+1}$ 的链群. 商群 $H_k(X,Y) = Z_k(X,Y)/B_k(X,Y)$ 称为 k 维相对同调群.

同调群 $H_k(X)$ 有一个到相对同调群的自然同态: $H_k(X)$ 中每个闭链可以看成是相对的闭链. 我们得到了同态

$$H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X,Y),\quad H^k(X,Y) \xrightarrow{j} H^k(X). \tag{20}$$

另外, 空间的嵌入映射 $i: Y \to X$ 定义了 "嵌入同态"

$$H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X), \quad H^k(X) \xrightarrow{i^*} H^k(Y). \tag{21}$$

我们现在构造边缘同态 ∂_*, 它把群 $H_k(X,Y)$ 映到群 $H_{k-1}(Y)$ (对于上同调, 同态 δ^* 把 $H^{k-1}(Y)$ 映到 $H^k(X,Y)$). 设 $c_k \in C_k(X,Y)$ 为相对闭链. 可以把它看成是通常的 (或 "绝对的") 链, 即作为 $C_k(X)$ 中的元, 它定义在差一个 $C_k(Y)$ 中链的范围内. 其边缘 $\partial c_k = c_{k-1}$ 是个 Y 中的 $k-1$ 维链. 于是我们定义 $\partial_*(c_k)$ 为闭链 $c_{k-1} = \partial c_k$ 的同调类 (见图 36). 同调类 $\partial_* c_k$ 不依赖于 c_k 类的代表元的选取 (请验证!). 我们得到了确有定义的同态

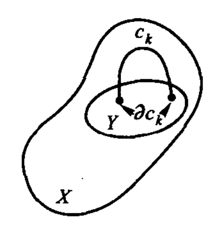


图 36

$$\partial_*: H_k(X,Y) \to H_{k-1}(Y). \tag{22}$$

把同态 i_*, j 和 ∂_* 结合起来, 我们便得到了同态的一个序列:

$$\begin{aligned} &\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_*} \cdots \\ &\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_0(Y) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j} H_0(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} 0. \end{aligned} \tag{23}$$

定理 3 序列 (23) 正合, 即

a) $\mathrm{Ker} i_* = \mathrm{Im} \partial_*$, b) $\mathrm{Ker} j = \mathrm{Im} i_*$, c) $\mathrm{Ker} \partial_* = \mathrm{Im} j$.

证明 a) 验证核 $\mathrm{Ker} i_*$ 等于像 $\mathrm{Im}\partial_*$. 设 $c_{k-1} \in C_{k-1}(Y)$ 为闭链, 使 $i_*(c_{k-1}) = 0$. 这表明在空间 X 中存在链 $c_k \in C_k(X)$ 使得 $\partial c_k = c_{k-1}$. 链 c_k 因而是相对闭链, 从而闭链 c_{k-1} 的同调类, 从定义知道它与 $\partial_*(c_k)$ 相同. a) 得证.

b) 设 c_k 为空间 X 中的闭链, 满足 $j(c_k) = 0$. 这表明 $\partial c_k = 0$, 并且存在空间 X 中的链 c_{k+1} 和空间 Y 中的链 $\tilde{c}_k$, 使得

$$\tilde{c}_k + \partial c_{k+1} = c_k.$$

于是 $\partial c_k = \partial \tilde{c}_k = 0$, 从而 $\tilde{c}_k$ 为 Y 中的闭链, 它同调于闭链 c_k. 我们已证明了, 闭链 c_k 的同调类有在空间 Y 上的代表元, 即 $c_k \in \mathrm{Im} i_*$.

c) 设 c_k 为 $C_k(X,Y)$ 中的相对闭链, 使 $\partial_* c_k$ 在群 $H_{k-1}(Y)$ 中为零. 这表明闭链 ∂c_k 在空间 Y 上同调于零: $\partial c_k = \partial \tilde{c}_k, \tilde{c}_k$ 为 $C_k(Y)$ 中的链. 于是链 $c_k - \tilde{c}_k$ 是空间 X 上的 "绝对" 闭链, 并给出了在相对群 $H_k(X,Y)$ 中等价于闭链 c_k. 于是, 闭链 $c_k \sim c_k - \tilde{c}_k$ 在同态 j 的像中. 对于在 $H_0(X,Y)$ 项的正合性请读者独立地验证. 定理全部证完. 对于上同调方面, 序列的构造和正合性的验证可相似地进行. □

定义 5 称序列 (23) 为偶对 (X,Y)的正合 (同调) 序列.

转而注意另一个问题. 如果 X 为单纯 (胞腔) 复形, 而 Y 为其单纯 (胞腔) 子复形, 则对单纯和胞腔偶对的同调 (和上同调) 群的序列中的同态以显然的方式定义. 所得序列的正合性的验证也完全与定理 3 的证明相似, 把它作为练习留给读者.

推论 由偶对的正合序列得到下面的等式:

$$\begin{aligned} &H_k(X,*) = H_k(X), k > 0, \\ &H_0(X,*) = 0, \qquad k = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

其中 X 为道路连通空间.

证明 事实上, 当 $k > 0$ 时, 我们有

$$H_k(*) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X,*) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(*) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(X) \longrightarrow \cdots.$$

当 $k-1=0$ 时, 包含关系 $H_0(*) \xrightarrow{i_*} H_0(X)$ 为同构, 这在前面已经讨论过了. 故而对所有 $k > 0$ 我们有了正合序列

$$0 \longrightarrow H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X,*) \longrightarrow 0. \tag{25}$$

这立即给出了这两个群的同构, 这是因为 $\mathrm{Ker} j = 0$, 而且 $\mathrm{Im} j = H_k(X,*)$.

对于 $k=0$, 我们有正合序列

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(*) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X) & \longrightarrow & H_0(X,*) & \longrightarrow & 0, \\ \| & & \| & & & & \\ G & & G & & & & \end{array} \tag{26}$$

其中 i_* 为同构. 于是证明了推论. □

相对同调 (上同调) 的极其重要的性质是它们的 “自然性”: 在偶对的连续映射

$$(X,X') \xrightarrow{f} (Y,Y') \tag{27}$$

下, 其中 $X' \subset X, Y' \subset Y$ 和 $f(X') \subset Y'$, 我们有映射

$$f_* : H_k(X) \longrightarrow H_k(Y), \qquad f^* : H^k(Y) \longrightarrow H^k(X), \tag{28}$$

$$f_* : H_k(X,X') \longrightarrow H_k(Y,Y'), \quad f^* : H^k(Y,Y') \longrightarrow H^k(X,X'), \tag{29}$$

$$f_* : H_k(X') \longrightarrow H_k(Y'), \qquad f^* : H^k(Y') \longrightarrow H^k(X'). \tag{30}$$

正合序列间同态的所有结构是“自然的”, 就是说, 它们与连续映射可交换. 故而我们有正合序列间的同态:

$$\begin{array}{ccccccccc} \xrightarrow{\partial_*} & H_k(X') & \xrightarrow{i_*} & H_k(X) & \xrightarrow{j} & H_k(X,X') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(X') & \longrightarrow \\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_k(Y') & \xrightarrow{i_*} & H_k(Y) & \xrightarrow{j} & H_k(Y,Y') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(Y') & \longrightarrow . \end{array} \tag{31}$$

对于上同调, 我们有类似的

$$\begin{array}{ccccccccc} \xrightarrow{\delta^*} & H^k(X,X') & \xrightarrow{j} & H^k(X) & \xrightarrow{i^*} & H^k(X') & \xrightarrow{\delta^*} & H^{k+1}(X,X') & \longrightarrow \\ & \uparrow f^* & & \uparrow f^* & & \uparrow f^* & & \uparrow f^* & \\ \xrightarrow{\delta^*} & H^k(Y,Y') & \xrightarrow{j} & H^k(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^k(Y') & \xrightarrow{\delta^*} & H^{k+1}(Y,Y') & \longrightarrow . \end{array} \tag{32}$$

这个性质非常有用. 例如, 有下面的命题.

命题 1 设有空间偶对的映射

$$f:(X,X')\longrightarrow (Y,Y'), \tag{33}$$

其中同态 f_* 对

$$H_k(X)\xrightarrow[\approx]{f_*}H_k(Y) \quad 和 \quad H_k(X')\xrightarrow[\approx]{f_*}H_k(Y') \tag{34}$$

为同构, 则相对群 $H_k(X,X')$ 与 $H_k(Y,Y')$ 也同构, 并且 f_* 构成了它们之间的同构映射 (对上同调结果类似).

证明 考虑图 31. 如果 $\alpha\in H_k(X,X')$ 且 $f_*\alpha=0$, 则

$$f_*\partial_*\alpha=\partial_*f_*\alpha=0. \tag{35}$$

故而 $f_*(\partial_*\alpha)=0$, 其中 $\partial_*\alpha\in H_{k-1}(X')$. 因为 $f_*:H_{k-1}(X')\to H_{k-1}(Y')$ 为同构, 故由 $f_*(\partial_*\alpha)=0$ 得到 $\partial_*\alpha=0$. 于是 $\alpha=j(\beta)$. 因为 $f_*(\alpha)=0$, 故 $f_*j(\beta)=jf_*(\beta)=0$, 由此得到 $f_*(\beta)=i_*(\gamma)$. 考虑 $\delta=f_*^{-1}(\gamma)\in H_k(X')$. 于是 $\beta=i_*(\delta)$, 从而 $\alpha=ji_*(\delta)=0$. 因此, 如果 $f_*(\alpha)=0$ 则 $\alpha=0$.

我们来证明, 群 $H_k(Y,Y')$ 中任意元 γ 具有形式 $\gamma=f_*(\delta)$. 如果 $\partial_*\gamma=0$, 则 $\gamma=j(\beta)$. 我们考虑元素 $jf_*^{-1}(\beta)=\alpha$. 我们便有 $f_*(\alpha)=\gamma$. 如果 $\partial_*\gamma\neq 0$, 则引进元 $f_*^{-1}\partial_*(\gamma)=\partial_*\beta$. 于是像 $f_*(\beta)$ 使得 $\partial_*(f_*(\beta)-\gamma)=0$. 命题得证. □

注 这个命题和它的证明对下面的叙述仍然有效: 如果在三个群 $H_*(X)$, $H_*(X')$, $H_*(X,X')$ 中任意一对的相应同态映射为同构, 则第三个在同调群间的映射也是同构. 对于上同调也是如此.

在下面我们将证明, 对于胞腔和单纯复形而言, 它的奇异同调群与胞腔和单纯同调群相一致. 为了给出证明, 我们需要上面所建立的那个同调的性质, 以及下面的我们现在就来证明的一个重要性质.

定理 4 设 K 为胞腔复形, L 为其子复形. 于是有等式

$$H_k(K,L)=H_k(K/L),\quad k>0. \tag{36}$$

这里的 K/L 表示将整个 L 收缩为一个单点得到的商空间. 我们还看出, K/L 同伦等价于胞腔复形 $K\bigcup CL$ (见图 37), 其中 CL 为 L 上的锥, 它由 $L\times I$ 中的上底收缩为一个点得到.

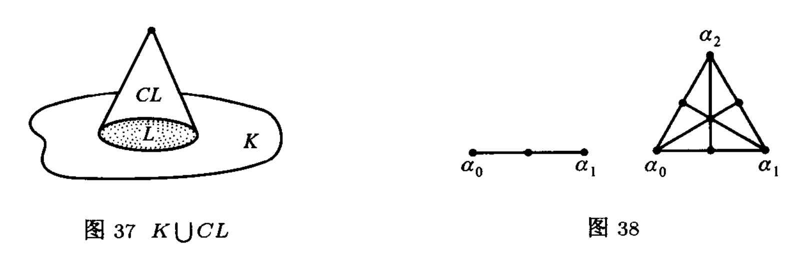


图 37 $K\bigcup CL$　　　　图 38

我们对单纯的 (奇异的) 同调群进行证明. 先引进重心重分算子. 为此, 我们定义单形 $[\alpha_0\cdots\alpha_k]=\sigma^k$ 的重分. 一维单形重分是说, 用一个在中心的新顶点把它一分为二. 为了重分二维单形 $[\alpha_0\alpha_1\alpha_2]$ (三角形), 我们先重分它所有的边缘. 然后取三角形的中心为新的顶点, 并与边缘上所有的顶点连接, 这些顶点有新取的也有原来的 (参看图 38). 继续类似地进行处理: 选取 k 维单形的中心, 而其边缘已经被重分. 连接这个新顶点与各个边缘单形 σ_i^{k-1} 的射线的全体便给出了在重心重分中的新单形 σ_i^k.

设 (σ^k,f) 为空间 X 中的一个奇异单形. 设 $\sigma_1^k,\cdots,\sigma_N^k$ 为单形 σ^k 经重心重分后的所有的 k 维单形. 以 $\beta(\sigma^k,f)$ 表示形如

$$\beta(\sigma^k,f)=\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i^k,f|_{\sigma_i^k}) \tag{37}$$

的链 (取 σ^k 的所有重分单形的和). 线性扩张算子 β 到整个奇异单纯链群 $C_k(X)$ 上:

$$\beta:C_k(X)\longrightarrow C_k(X),\quad k=0,1,\cdots. \tag{38}$$

成立下面的引理.

引理 2 算子 β 与边缘同态 ∂ 可交换, 并且代数同伦于恒同算子.

证明 等式 $\partial\beta = \beta\partial$ 是显然的 (单形的重分的 "内" 边缘在链 $\partial\beta$ 中以不同符号出现了两次). 我们构造一个代数同伦 D, 使得 $\partial D \pm D\partial = \beta - 1$. 为此, 我们定义单形 σ^k 与线段 I 的直积 $\sigma^k \times I$ 的三角剖分, 使 $\sigma^k \times 0$ 为一个单形, 而 $\sigma^k \times 1$ 为 σ^k 的重心重分. 对于 $k = 0, 1, 2, \sigma^k \times I$ 的三角剖分展示在图 39 上. 在一般情形, $\sigma^k \times I$ 的三角剖分是这样构成的: 设 $\sigma^{k-1} \times I$ 剖分的单形已经构造了; 于是 $\sigma^k \times I$ 中各个面的边缘也已被剖分. $\sigma^k \times I$ 的下底仍保持不变; 我们在上底进行重心重分. 现在整个边界 $\partial(\sigma^k \times I)$ 已被三角剖分了. 把上底的中心与边界 $\partial(\sigma^k \times I)$ 的三角剖分的所有顶点相连接, 于是得到了 $\sigma^k \times I$ 的三角剖分.

设 (σ^k, f) 为空间 X 中的一个奇异单形. 定义一个 "平凡" 映射:

$$\widehat{f} : \sigma^k \times I \longrightarrow X, \ \widehat{f}(x,t) = f(x). \tag{39}$$

我们以 $D(\sigma^k, f)$ 表示 $k+1$ 维链 $(\sigma^k \times I, \widehat{f}) = D(\sigma^k, f)$, 其中 $\sigma^k \times I$ 已按上面的方式进行了剖分. 由构造, 算子 D 给出了所要的同伦. 引理得证. □

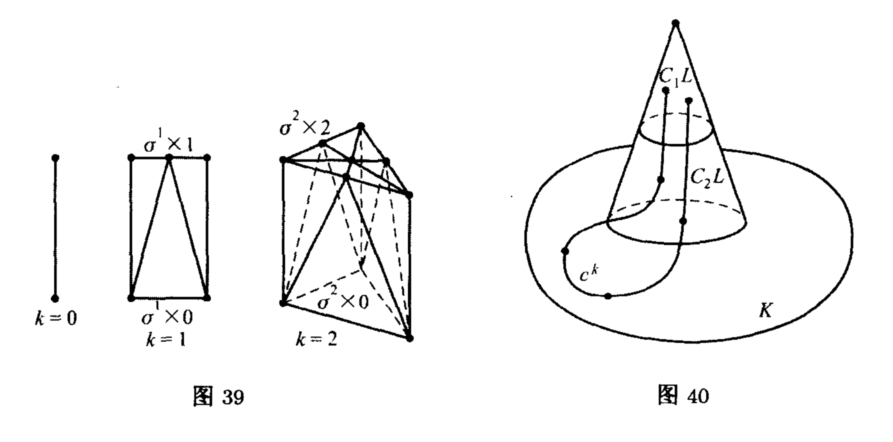


图 39　　图 40

定理的证明 由于同调的同伦不变性, 我们有等式

$$H_k(K \bigcup CL, CL) = H_k(K \bigcup CL, *),$$

这是因为锥 CL 可收缩为一个点. 另外, 当 $k > 0$ 时有

$$H_k(K \bigcup CL, *) = H_k(K \bigcup CL) = H_k(K/L)$$

(参看定理 3 的推论). 现在只需证明

$$H_k(K \bigcup CL, CL) = H_k(K, L). \tag{40}$$

设 c^k 为 $H_k(K \bigcup CL, CL)$ 中任一个 k 维相对闭链. 我们来构造在 $H_k(K, L)$ 中的同调于 c^k 的闭链.

我们将锥 CL 分为两半 C_1L 和 C_2L (见图 40). 由引理 2, 可将闭链 c^k 变换为同调于它的闭链 $\beta^N c^k$, 使其单形变小. 让 N 增大 (反复重分), 可以使得那些与 C_1L 相交的单形整个在锥 CL 中. 于是消掉所有那些与 C_1L 相交的单形并不会改变相对 $(\mathrm{mod} CL)$ 同调闭链 $\beta^N c^k \sim c^k$ 的类. 所得到的闭链 $\tilde{c}^k$ 整个位于群 $H_k(K \bigcup C_2L, C_2L) = H_k(K, L)$ 中 (因为 C_2L 收缩为 L). 因此构造了群 $H_k(K, L)$ 中的闭链 $\tilde{c}^k$, 它同调于闭链 c^k.

如果 (K, L) 上的闭链 c^k 在群 $H_k(K \bigcup CL, CL)$ 中同调于零, 则应用相似的讨论, 通过重分 c^k 并限制它的链, 可 "切掉"c^k 限制在锥的上顶点附近的链. 定理证完. □

§6. 胞腔复形的奇异同调. 它与胞腔同调的等同. 单纯同调的庞加莱对偶

我们要计算球面 $S^n, n = 1, 2, \cdots$ 的奇异同调群. 在整个这节中, 系数群都取为整数群.

定理 1 对于 $n > 0$, 我们有

$$H_i(S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, i = 0, i = n, \\ 0, \ i \neq 0, n. \end{cases} \tag{1}$$

证明 设 $n = 1$. 我们来计算圆 S^1 的同调群, 这时我们使用偶对 $(D^1, \partial D^1)$ 的正合序列, 其中 $\partial D^1 = S^0$ 为两个点, 那么由定理 5.4 得到 $H_k(D^1, S^0) = H_k(S^1)$. 我们有:

$$H_1(D^1) \to H_1(D^1, S^0) \to H_0(S^0) \to H_0(D^1) \to 0. \tag{2}$$

然而 $H_1(D^1) = 0, H_0(D^1) = \mathbb{Z}, H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 这是因为 S^0 有两个连通分支. 于是序列 (2) 有形式

$$0 \to H_1(S^1) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0, \tag{3}$$

由此得到 $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. 当 $k > 1$ 时我们有

$$H_k(D^1) \to H_k(D^1, S^0) \to H_{k-1}(S^0), \tag{4}$$

其中 $H_k(D^1) = H_{k-1}(S^0) = 0$, 这表明 $H_k(D^1, S^0) = H_k(S^1) = 0$. 圆的同调群已算出.

假设对球面 S^{n-1} 的同调群的定理已经证明. 偶对 (D^n, S^{n-1}) 的正合序列为

$$\cdots \to H_k(D^n) \to H_k(D^n, S^{n-1}) \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to H_{k-1}(D^n) \to \cdots \tag{5}$$

当 $k>1$ 时, 我们得到了正合序列

$$0 \to H_k(S^n) \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to 0, \tag{6}$$

由此知 $H_k(S^n)=H_{k-1}(S^{n-1}), k>1$. 当 $k=1$ 时我们得到正合序列

$$H_1(D^n) \to H_1(D^n, S^{n-1}) \to H_0(S^{n-1}) \to H_0(D^n) \to 0,$$

即

$$0 \to H_1(D^n, S^{n-1}) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

由此序列的正合性知同态 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 为同构, 故 $H_1(D^n, S^{n-1})=H_1(S^n)=0$. 于是知道对于球面 S^n 的定理论断的正确性. 定理证完. □

注 我们把 n 维单形 σ^n 等同于圆盘 D^n; 于是恒同映射 $\sigma^n\to\sigma^n$ 定义了群 $H_n(D^n, S^{n-1})=H_n(S^n)$ 中的一个相对奇异闭链. 这个闭链是奇异同调群 $H_n(S^n)$ 的生成元.

习题 1 设 $\sigma^n=[\alpha_0\cdots\alpha_n]$ 为 n 维单形; P 为顶点 $\alpha_0,\cdots,\alpha_n$ 的一个置换. P 定义了映射 $\sigma^n\to\sigma^n$. 计算在群 $H_n(S^n)$ 中的对应元.

推论 1 n 维球面 $S_1^n,\cdots,S_N^n$ 束的奇异同调群为

$$H_k\left(\bigvee_{i=1}^N S_i^n\right)=0,\quad k\neq 0,n,$$

$$H_0\left(\bigvee_{i=1}^N S_i^n\right)=\mathbb{Z},\ H_n\left(\bigvee_{i=1}^N S_i^n\right)=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{N\text{ 项}}.$$

证明 考虑偶对 $\left(\bigcup\limits_i D_i^n=K,\bigcup\limits_i \partial D_i^n=L\right)$. 显然, $H_j(K,L)=\sum H_j(D^n,\partial D^n)$. 当 $j>0$ 时, 根据此定理, 我们有 $H_j(D^n,\partial D^n)=H_j(S^n)$. 推论证完. □

推论 2 次数 $\deg f$ 的映射 $f: S^n\to S^n$ 定义的同态 $f_*: H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ 是乘以数 $\deg f$.

证明 球面 S^n 到自己的 $k=\deg f$ 次的映射 f 可以像图 41 所显示的那样构造 (任意其他 k 次映射同伦于它). 所有的球面束映成恒同于其中每一项中的一个. 球面到 k 个球面束的映射把 $H_n(S^n)=\mathbb{Z}$ 的生成元转变为此束的所有生成元的和. 球面束到球面的映射又把此束的 n 维同调群的每个生成元变成群 $H_n(S^n)$ 的生成元. 故而自身的映射 $H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ 是乘群 $H_n(S^n)=\mathbb{Z}$ 的生成元以 $k=\deg f$. 由此得到所要的推论. □

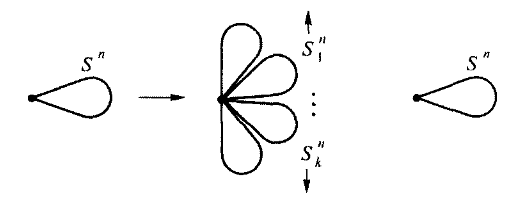


图 41

推论 3 对于胞腔复形 K, 我们有

$$H_j(K_n, K_{n-1}) = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}, & j = n, \end{cases} \tag{7}$$

其中的项数等于 n 维胞腔的个数.

证明 由推论 1 和定理 1 得到. □

定理 2 胞腔复形的奇异同调同构于胞腔同调.

证明 我们先证明在单纯复形情形的定理; 利用已经证过的事实, 这十分简单. 每个单形都可以看作是奇异单形 (σ^k, f). 这给出了单纯链复形到奇异链复形中的包含映射

$$C^{\text{simp}}(K) \to C^{\text{sing}}(K), \tag{8}$$

它显然与边缘算子 ∂ 可换. 因此我们有同调群的映射

$$H_k^{\text{simp}}(K) \to H_k^{\text{sing}}(K). \tag{9}$$

如果 L 为 K 中的单纯子复形, 于是有相对群之间的映射

$$H_k^{\text{simp}}(K, L) \to H_k^{\text{sing}}(K, L) \tag{10}$$

和偶对 (K, L) 的正合序列之间的映射. 由归纳可设定理已在维数 $\leqslant n-1$ 的复形的情形下成立. 对于 n 维复形 K_n, 我们有正合列间的映射

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow H_{j+1}^{\text{simp}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_j^{\text{simp}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_j^{\text{simp}}(K^n) \longrightarrow \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\longrightarrow H_{j+1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_j^{\text{sing}}(K^n) \longrightarrow \\
& & & & \\
& & \longrightarrow H_j^{\text{simp}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{simp}}(K^{n-1}) \longrightarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
& & \longrightarrow H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \longrightarrow .
\end{array} \tag{11}$$

我们已知道下面的事实: a) 由归纳, $H_*^{\text{simp}}(K^{n-1}) \approx H_*^{\text{sing}}(K^{n-1})$;

b) $H_j^{\text{simp}}(K^n, K^{n-1}) = H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ \mathbb{Z} + \cdots + \mathbb{Z}, & j = n, \end{cases}$ 其中的项数等于 n 维单形的个数 (参看推论 3). 于是, 利用正合序列 (11) 的映射, 我们得到的结论是, 映射

$$H_j^{\text{simp}}(K^n) \to H_j^{\text{sing}}(K^n) \tag{12}$$

对所有 j 为同构 (参看命题 5.1). 因此, 对于单纯复形定理得证.

现在设 K 为一般的胞腔复形, K^n 为其 n 维骨架, 即所有维数不大于 n 的胞腔的并. 于是 K^n/K^{n-1} 为 n 维球面的束, 每个 n 维胞腔对应一个球面. 由定理 5.4 和定理 1, 我们得到:

$$H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K), H_i(K^n, K^{n-1}) = 0, i \neq n, \tag{13}$$

(整系数), 其中 $C_n(K)$ 为胞腔链群.

定义同态 $\partial = j \circ \partial_*$:

$$C_n(K) \approx H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \approx C_{n-1}(K) \tag{14}$$

为复合

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}).$$

引理 1 由公式 $\partial = j\partial_*$ 给出的算子 $\partial : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ 与胞腔链复形的边缘算子相同.

证明 设 σ^n 为复形 K 中的一个 n 维胞腔. 它是群 $H_n(\sigma^n, \partial\sigma^n) \subset H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$. 在边缘同态 $H_n(\sigma^n, \partial\sigma^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ 下, σ^n 变为群 $H_{n-1}(S^{n-1})$ 的生成元. 由定理 1 的推论 2 知, 它在群 $H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) = C_{n-1}(K)$ 中的像为

$$\partial\sigma^n = \sum_i [\sigma^n : \sigma_i^{n-1}]\sigma_i^{n-1} \tag{15}$$

(对所有 $n-1$ 维胞腔取和). 这里 $[\sigma^n : \sigma_i^{n-1}]$ 为胞腔的关联系数, 它由映射 $\partial\sigma^n \to K^{n-1}/K^{n-2}$ 在第 i 项上的次数定义 (参看 §5). 公式 (15) 与 §4 中胞腔链的边缘算子的定义相同. 引理得证. □

胞腔同调群有下面的性质:

a) 在维数比复形的维数大时它们等于零, 即 $H_j^{\text{cell}}(K^n) = 0, j > n$.

b) 因为没有边缘, 群 $H_n^{\text{cell}}(K^n)$ 同构于闭链群 $Z_n^{\text{cell}} \subset C_n(K^n)$.

c) 群 $H_j^{\text{cell}}(K^n)$ 只依赖于骨架 K^{j+1}, 即这个群对于 $K^{j+1}, K^{j+2}, \cdots, K^{n-1}, K^n$ 是相同的.

按归纳, 我们假定对维数 $\leqslant n-1$ 的复形胞腔同调和奇异同调相同这个论断已经被证明. 现在考虑偶对 (K^n, K^{n-1}):

$$\begin{aligned}&\xrightarrow{\partial_*} H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_j^{\text{sing}}(K^n) \xrightarrow{j} H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) \to \\ &\xrightarrow{\partial_*} H_{j-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \to .\end{aligned} \tag{16}$$

对 $j \neq n$ 我们有 $H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) = 0$. 故而从 (16) 得出

$$H_j^{\text{sing}}(K^n) = H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}), \quad j \neq n-1, n. \tag{17}$$

这样便有

$$H_j^{\text{sing}}(K^n) = \begin{cases} 0, & j \geqslant n+1 \\ H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) = H_j^{\text{cell}}(K^{n-1}), & j \leqslant n-2. \end{cases} \tag{18}$$

还要证明对维数 $j = n, n-1$ 时的定理.

由 (16) 我们有

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to H_n^{\text{sing}}(K^n) & \to & H_n^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \\ \| & & \| & & \| \\ 0 \to H_n^{\text{sing}}(K^n) & \longrightarrow & C_n^{\text{cell}}(K^n) & \longrightarrow & Z_{n-1}^{\text{cell}}(K^{n-1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n) & \to & H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) \\ \| & & \| \\ \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n) & \to & 0. \end{array}$$

利用关于胞腔链中的边缘同态 ∂ 等于同态

$$j\partial_* : H_n^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \xrightarrow{j} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1})$$

的引理 1, 我们达到下面的结论:

a) 群 $H_n^{\text{sing}}(K^n)$ 作为 ∂ 的核包含在 $C_n^{\text{cell}}(K^n)$ 中, 即与 $H_n^{\text{cell}}(K^n)$ 相同.

b) 群 $H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n)$ 与 $Z_{n-1}^{\text{cell}}/\text{Im}\partial$ 相同, 从而表示与 $H_{n-1}^{\text{cell}}(K^n)$ 相同.

定理证完. □

对于上同调的相应定理, 其证明完全类似.

推论 4 胞腔同调群同伦不变. 单纯同调是胞腔同调的特殊情况, 从而也与其奇异同调相同, 并且也就同伦不变.

重要注解 在关于胞腔同调等同于奇异单纯同调定理证明的推导中, 这些同调的显式构造并不是本质性的. 只有这些同调理论的形式性质才是重要的. 以

简明形式提取出这些性质, 便可给出同调论的一个 "公理化" 定义 (即 Steenrod–Eilenberg 公理). 下面是这个定义.

a) 同调论是建立在 "函数"(即所谓的 "函子") 的基础上的, 对于每个胞腔复形 K (或者每个偶对 $(K, L), L \subset K$ 为子复形) 伴以一个阿贝尔群的集合 $H_i(K)$ (或 $H_i(K, L)$)$i = 0, 1, 2, \cdots$, 并且对每个复形的连续的 (也不妨认为是胞腔的) 映射 $f: K \to K'$ (或 $f: (K, L) \to (K', L')$, 其中 $f(L) \subset L'$) 伴以同态的集合

$$\begin{array}{l} f_*: H_i(K) \to H_i(K') \\ f_*: H_i(K, L) \to H_i(K', L'), \end{array} \quad i = 0, 1, 2, \cdots .$$

要求映射的复合对应于同态的复合:

$$(fg)_* = f_* g_*; \tag{19}$$

恒同映射应对应于恒同同态: $1_* = 1$.

b) 所引进的同调论应具有下列性质 ("同调论公理"):

1. **同伦不变性** 如果映射 f 和 g 同伦, 则同态 f_* 和 g_* 相同:

$$f \sim g \Longrightarrow f_* = g_*.$$

2. **定义了边缘算子**:

$$\partial: H_m(K, L) \to H_{m-1}(L), m = 1, 2, \cdots ,$$

其中 L 为 K 中的子复形, 它与复形偶对的连续映射交换, 即

$$\partial f_* = f_* \partial; f: (K, L) \to (K', L'), f(L) \subset L'.$$

3. **正合性** 以 i, j 表示显见的包含关系

$$L \overset{i}{\subset} K \overset{j}{\subset} (K, L).$$

要求群和同态的序列

$$\cdots \to H_{m+1}(K, L) \xrightarrow{\partial} H_m(L) \xrightarrow{i_*} H_m(K) \xrightarrow{j_*} H_m(K, L) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(L) \to$$

为正合.

4. **切除公理** $H_m(K, L) = H_m(K/L, *)$, 其中 L 为 K 的子复形, K/L 为将 L 收缩成一个点 $*$ 得到的商复形.

5. **法化公理** $H_m(*) = 0$, 其中 $m > 0, *$ 为一个单点.

习题 2 证明如果 $H_0(*) = G$ 为已知群, 则上面所列出这些性质确定的同调论是唯一的.

注　胞腔和奇异同调满足所有这些性质 (参看 §4, 5); 正因为如此, 它们才唯一确定. 在 §5 中也讨论了立方体奇异同调的例子 (没有约化的情形), 它不满足法化公理 (单点的同调群在正维数时不是平凡的).

如果在同调论的定义中去掉正规化条件, 则得到了*广义同调理论*.立方体奇异同调论为广义同调论的平凡例子 (参看 §5 中的习题). 另一个相当复杂 (并很重要) 的广义同调理论的例子是配边理论; 我们将在第三章遇到它.

类似于同调理论的定义给出了上同调理论的公理化定义 (我们把对公理的准确的系统阐述和证明上同调论的唯一性定理作为习题留给读者). 按这种方式可以得到在 §1 中通过微分形式所定义流形的上同调与其他形式的上同调的等同性. 为此, 取任意复形在欧氏空间中嵌入的邻域后, 只需要把此复形转化为流形就可以了. 我们将不在这里进行精确和详细的讨论. 因为在 §14 中将找到更具构造性的方式去证明由形式定义的上同调和其他形式的上同调之间的等同性.

我们将指出在流形为单纯复形的情形时, 它的重心重分算子的一个应用, 即"*庞加莱对偶*"(还可参看 §18): 设光滑流形 M^n 可剖分, 即可以看成是由光滑单形组成单纯复形. 我们假设, 此剖分充分小 (如果必要, 可进行多次重心重分). 设 σ_α^k 为 M^n 的单形. 定义对偶流形 $D(\sigma_\alpha^k)=\overline{\sigma}_\alpha^{n-k}$ 为 $n-k$ 维胞腔.

a) n 维单形 σ_α^n 对偶于此复形的重心重分的顶点 $D\sigma_\alpha^n$, 它是单形 σ_α^n 的中心;

b) 0 维单形 σ_γ^0 对偶于 n 维胞腔块 $D\sigma_\gamma^0$ (多面体), 是其重心重分复形中所有以 σ_γ^0 为顶点的单形的和 (见图 42, 其中 $n=2$).

c) M^n 中的边 σ_δ^1 对应于 $(n-1)$ 维胞腔块 $D\sigma_\delta^1$, 它是这个重心重分中所有那些 $n-1$ 维单形的并, 这些单形以边 σ_δ^1 的中心为顶点, 并与此边横截相交.

d) M^n 中的边缘 σ_s^{n-1} 对应于一维胞腔块 $D\sigma_s^{n-1}$, 它由重心重分中所有那些一维单形构成, 它们以 σ_s^{n-1} 的中心为顶点且与 σ_s^{n-1} 横截相交 (见图 42).

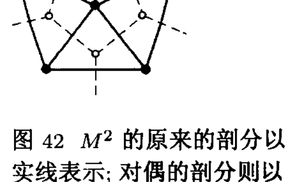


图 42　M^2 的原来的剖分以实线表示; 对偶的剖分则以虚线表示

e) 更进一步, 对一般情形的讨论已经清楚了: M^n 中的单形 σ_s^k 对偶于 $n-k$ 维的胞腔块 $D\sigma_s^k$, 它是重分中那些 $n-k$ 维单形并, 这些单形以 σ_s^k 的中心为顶点并在此中心与 σ_s^k 横截相交. 胞腔 $D\sigma_s^k$ 将 M^n 剖分为复形 (多面体).

算子 D 有性质:

1) 交集 $\sigma_s^k\bigcap D\sigma_s^k$ 为一个点, 即 σ_s^k 的中心.

2) 在相差一个符号的范围内成立等式

$$(\partial\sigma_s^k)\bigcap D\sigma_t^{k-1}=\sigma_s^k\bigcap(\partial D\sigma_t^{k-1})(\mathrm{mod}2). \tag{20}$$

性质 1) 和 2) 对 $n=1,2,3$ 维是显然的. 对于 $n>3$ 的情形也容易弄清楚.

性质 1) 使我们可定义一个双线性数积 $a \circ b$, 其中 $a \in C_j(M^n)$ 是个链, 而 $b \in C_D^{n-j}(M^n)$ 为胞腔块 $D\sigma_\alpha^j$ 中的对偶复形中链, $a = \sum_i \lambda_i \sigma_i^j, b = \sum_k \mu_k D\sigma_k^j$ (后面这个等式的意思是说, 胞腔 $D\sigma_k^j$ 是个以链记号表示的上链, 它在 $D\sigma_k^j$ 上取值为 1, 而在其他胞腔上取值为 0. 这样的上链构成了群 C_D^{n-j} 的基).

设 λ 和 μ 按模 2 计算. 我们得到

$$\sigma_i^j \circ D\sigma_k^j = \delta_{ik} (\mathrm{mod} 2) \tag{21}$$

$$a \circ b = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k \delta_{ik}. \tag{22}$$

由性质 2) 知,

$$(\partial a) \circ b = a \circ (\partial b), \tag{23}$$

即边缘算子对偶. 由 (23) 我们得到

$$H_j(M^n; \mathbb{Z}_2) \stackrel{D}{=\!=} H^{n-j}(M^n; \mathbb{Z}_2), \tag{24}$$

这是因为两边的复形都是同一个流形 M^n 的胞腔剖分, 从而在每一个维数上有同构的同调和上同调. 这是关于胞腔同调的同伦不变性定理的一个推论. 称同构 (24) 为 "庞加莱对偶". 对于定向流形, (23) 和 (24) 也在 $\mathbb{Z}$ 上成立. 在后面 (见 §18) 我们要用其他的办法得到庞加莱对偶.

甚至在准确定义同调群之前, 我们就反复使用过流形 M^n 的 "k 维闭链" 和 "$(k+1)$ 维胞腔" 这些词条. 在后面的叙述中我们是这样理解的:

"闭链" 以 (M^k, f) 给出, 其中 M^k 为定向闭流形, $f: M^k \to M^n$ 为其映射.

"膜" (W^{k+1}, f) 以具边缘的定向紧流形 W^{k+1} 和映射 $f: W^{k+1} \to M^n$ 给出. "膜" 有边缘

$$\partial(W^{k+1}, f) = (\partial W^{k+1}, f\big|_{\partial W^{k+1}}). \tag{25}$$

"闭链群" 是 "闭链" 的形式和

$$\sum_i (M_i^k, f_i). \tag{26}$$

以等价于零的闭链即边缘 (25) 去作商群, 我们得到类似于同调的一个群, 称其为 "配边" 群, 并记为 $\Omega_k(M^n)$; 可以对任意复形定义配边群 $\Omega_k(X)$; 也可自然地引进 "相对配边群" $\Omega_k(X, Y)$. 对于配边群, 同伦不变性仍然成立, 并对偶对 (X, Y) 有正合序列, 甚至有性质 $\Omega_*(X, Y) = \Omega_*(X/Y)$. 但是对于可缩空间 (例如点空间 $*$) 配边群在正维数情形并不是平凡的. 道理很简单: 远不是每个闭流形 M^k 都是一个具边界的 $(k+1)$ 维流形的边缘. 例如, 如果每个流形 M^4

都是膜 W^5 的边缘, 则类 $p_1(M^4) = 0$. 特别, $\mathbb{C}P^2$ 并不是边缘 (这里的 p_1 是庞特里亚金类, 详情可参看 §27).

类似地, 可定义 "模 2 配边群" 或 "非定向配边",其中闭链 (M^k, f) 为所有闭流形 $M^k \xrightarrow{f} X$ 的映射 (不仅仅是定向的); 膜也取遍非定向的流形. 以 $N_k(X)$ 表示.

习题 3 证明 $\mathbb{R}P^2$ 不是任何一个三维流形的边缘. 证明, 所有它自身的直积 $\mathbb{R}P^2 \times \cdots \times \mathbb{R}P^2$ 也不是边缘.

习题 4 证明, 如果 M^k 是个边缘, 即 $M^k = \partial W^{k+1}$, 则欧拉示性 $\chi(M^k)$ 为偶数.

有自然的同态

$$\begin{aligned} &\Omega_k(X) \to H_k(X;\mathbb{Z}) \to H_k(X;\mathbb{R}), \\ &N_k(X) \to H_k(X;\mathbb{Z}_2). \end{aligned} \tag{27}$$

属于这些同态的像的那些同调类被称做 "作为流形连续像的闭链", 这是我们原先直观上所理解的闭链. 但是, 配边理论及其相关问题的研究要更为复杂 (见 §27).

§7. 直积空间的同调. 上同调乘积. $H-$ 空间和李群的上同调. 酉群的上同调

设 K_1 和 K_2 为胞腔复形. 它们的直积 $K_1 \times K_2$ 仍是个胞腔复形, 其胞腔是复形 K_1 和 K_2 的复形的乘积. 因而整系数胞腔链群 $C_n(K_1 \times K_2;\mathbb{Z})$ 的形状是

$$C_n(K_1 \times K_2;\mathbb{Z}) = \sum_{k+l=n} C_k(K_1;\mathbb{Z}) \otimes C_l(K_2;\mathbb{Z}).$$

两个胞腔乘积 $\sigma^i \times \sigma^j$ 的边缘可由下面公式求出:

$$\partial(\sigma^i \times \sigma^j) = (\partial\sigma^i) \times \sigma^j \bigcup (-1)^i \sigma^i \times (\partial\sigma^j),$$

其中符号 $(-1)^i$ 是出于定向的考虑. 由此得到

命题 1 胞腔复形直积 $K_1 \times K_2$ 的整系数链复形是链复形 $C(K_1;\mathbb{Z})$ 和 $C(K_2;\mathbb{Z})$ 的张量积:

$$C(K_1 \times K_2, \mathbb{Z}) = C(K_1, \mathbb{Z}) \otimes C(K_2;\mathbb{Z})$$

(参看 §2).

显然这个事实不仅对整数系数成立, 而且在任意有单位元的环中, 特别是在域中也对. 应用定理 2.2, 我们得到

推论 对系数在域 k 中的同调群成立等式

$$H_n(K_1 \times K_2; k) = \sum_{m+l=n} H_m(K_1; k) \otimes H_l(K_2; k).$$

在对任意环 G 的一般情形, 定义了闭链的张量积所给出的同态 (不是同构!):

$$\sum_{k+l=m} H_k(K_1; G) \otimes H_l(K_2; G) \to H_m(K_1 \times K_2; G). \tag{1}$$

它把闭链 $c_1 = \sum_i a_i \sigma_i^k, c_2 = \sum_j b_j \sigma_j^l$ 变成闭链 $c_1 \otimes c_2 = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^k \times \sigma_j^l)$. 我们有

$$\partial(c_1 \otimes c_2) = \partial c_1 \otimes c_2 + (-1)^k c_1 \otimes \partial c_2.$$

因此链 $c_1 \otimes c_2$ 是个闭链. 将 c_1 换为 $c_1 + \partial c$, 则把闭链 $c_1 \otimes c_2$ 换成了同调的 $(c_1 \otimes \partial c) \otimes c_2 = c_1 \otimes c_2 + \partial(c \otimes c_2)$. 因此映射 (1) 的构造是合理的. 如果 $G = k$ 为域, 则给出了张量积的同构.

类似地定义在系数为环的上同调间的张量积:

$$\sum_{k+l=m} H^k(K_1; G) \otimes H^l(K_2; G) \to H^m(K_1 \times K_2; G)$$

(如果 $G = k$ 为域, 则为同构).

对角线映射 $\triangle : K \to K \times K$ 诱导出了上同调间的同态, 其中 $\triangle$ 把 x 映到 (x, x):

$$H^*(K \times K; G) \xrightarrow{\triangle^*} H^*(K; G).$$

定理 1 设 G 为结合交换环, 具单位元. 于是复合映射

$$\triangle^*(a \otimes b) = ab : H^k(K; G) \otimes H^l(K; G) \to H^{k+l}(K \times K; G) \xrightarrow{\triangle^*} H^{k+l}(K; G)$$

给出了上同调群的直和 $H^*(K; G) = \sum_{i \geqslant 0} H^i(K; G)$ 中一个环结构, 它是具单位元 $1 \in H^0(K; G)$ 的一个结合反交换环: $ba = (-1)^{kl} ab$.

证明 结合性和反交换性是由张量积的显然的性质得到:

a) 结合性. 如果 $c_1 \in H^k(K_1; G), c_2 \in H^l(K_2; G), c_3 \in H^m(K_3; G)$, 则 $(c_1 \otimes c_2) \otimes c_3$ 与 $c_1 \otimes (c_2 \otimes c_3)$ 在群 $H^{k+l+m}(K_1 \times K_2 \times K_3; G)$ 中相等.

b) 反交换性. 如果 $c \in H^k(K), c' \in H^l(K), f : K \times K \to K \times K$ 使 $f(x, y) = (y, x)$, 即交换分量, 则 $f^*(c \otimes c') = (-1)^{kl} c' \otimes c$. 要证明这点, 我们需要利用事实, 即交换胞腔积 $\sigma^k \times \sigma^l \longmapsto \sigma^l \times \sigma^k$ 时, 乘积的定向改变了一个因子 $(-1)^{kl}$.

环 $H^*(K;G)$ 中的单位元是 $1 \in G = H^0(*,G)$. 事实上, 对角线 $\triangle$ 在分量上的投影

$$K \xrightarrow{\triangle} K \times K \xrightarrow{p} K, p(x,y) = x$$

是个恒同映射, 故而 $\triangle^*(a \otimes 1) = a$. 定理证完. □

注 1 对于流形 M_1 和 M_2 上的微分形式有完全类似的情形: 如果已知在 M_1 和 M_2 上分别有微分形式 $\overline{\omega} = \sum f_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 和 $\overline{\overline{\omega}} = \sum g_{j_1\cdots j_l} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_l}$, 则可定义它们的张量积 $\overline{\omega} \otimes \overline{\overline{\omega}}$ 为 $M_1 \times M_2$ 上的形式 $\omega = \overline{\omega} \otimes \overline{\overline{\omega}} = p_1^*(\overline{\omega}) \wedge p_2^*(\overline{\overline{\omega}}) = (\sum f_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \wedge (\sum g_{j_1\cdots j_l} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_l})$, 其中 $p_1 : M_1 \times M_2 \to M_1, p_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ 为投影. 在 $M_1 \times M_2$ 上的任意光滑形式都可以展开为由 M_1 和 M_2 上分量的乘积形式的收敛级数. 两个闭形式的张量积仍闭于 $M_1 \times M_2$; 闭形式和恰当形式的张量积为恰当形式. 形式的外积定义为: 如果 $M_1 = M_2$, 则有对角线 $\triangle = \{(x,x)\} = M_1 \subset M_1 \times M_1$, 限制于对角线有 $\triangle^*(\omega_1 \otimes \omega_2) = \omega_1 \wedge \omega_2$ (在 M_1 中), $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{kl} \omega_2 \wedge \omega_1$.

注 2 对于有限的单纯复形 K, 单纯上链的乘积 (即 "上积") 可以这样定义: 将复形 K 的所有顶点排序为 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$. 因而任意单形 $\sigma^k \subset K$ 可以写为有序的顶点组

$$\sigma^k = (\alpha_{j_0} \cdots \alpha_{j_k}), \text{其中} j_0 < j_1 < \cdots < j_k.$$

设 α 为 k 维上链, β 为 l 维上链 (即分别为 k 维和 l 维单形上的数值函数). 定义 $k+l$ 维的上链为

$$(\alpha \smile \beta, \sigma^{k+l}) = (\alpha, \sigma_1^k)(\beta, \sigma_2^l), \tag{2}$$

其中 $\sigma^{k+l} = (\alpha_{j_0}\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{k+l}}), \sigma_1^k = (\alpha_{j_0}\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_k}), \sigma_2^l = (\alpha_{j_k}\alpha_{j_{k+1}} \cdots \alpha_{j_{k+l}})$. 上链积 $\alpha \smile \beta$ 的单位元是在每个顶点取值为 $1 \in G$ 的上链 (G 为具单位元的交换环), 显然, 这是个上闭链. 上链积不是反交换的.

习题 1 验证等式 (莱布尼兹公式)

$$\delta(\alpha \smile \beta) = (\delta\alpha) \smile \beta + (-1)^{\deg\alpha} \alpha \smile (\delta\beta).$$

习题 2 证明, 如果 α 和 β 为上闭链, 则下面二个乘积的差上同调于零: $\alpha \smile \beta - (-1)^{kl} \beta \smile \alpha = \delta\gamma, k = \deg\alpha, l = \deg\beta, \delta\alpha = \delta\beta = 0$. 因此我们得到 $H^*(K;G) = \sum\limits_{q \geqslant 0} H^q(K;G)$ 为反交换上同调环 (单位元 $1 \in H^0(K;G) = G$).

习题 3 证明, 在上同调中的乘积 $\smile$ 与前面所引进的乘积相同.

整系数上链的乘积让我们可定义重要的"切割"运算(即"交积"). 如果 z_{k+l} 为 $C_{k+l}(K;\mathbb{Z})$ 的链, α 和 β 为上链, 分别属于 $C^k(K;\mathbb{Z})$ 和 $C^l(K;\mathbb{Z})$, 则可定义

$$(\alpha^k \smile \beta^l, z_{k+l}) = (\alpha^k \frown z_{k+l}, \beta^l). \tag{3}$$

对所有的 β^l 和固定的 α^k 和 z_{k+l}, 公式 (3) 定义了一个 l 维的链

$$z_l = \alpha^k \frown z_{k+l} \in C_l(K;\mathbb{Z}).$$

习题 4 证明闭链 z_{k+l} 上闭链 α^k 去"切割"的运算确实给出了在同调群上的正确定义:

$$H^k(K;\mathbb{Z}) \frown H_{k+l}(K;\mathbb{Z}) \subset H_l(K;\mathbb{Z}).$$

习题 5 证明在复形的连续映射 $K \xrightarrow{f} L$ 下, 在同调群中有

$$f_*(f^*(\alpha) \frown z) = \alpha \frown f_*(z).$$

习题 6 证明算子 D (参看 §6) 由交积 $\alpha \mapsto \alpha \bigcap [M^n]$ 定义, 其中 $[M^n] = z$ 为所有 n 维单形的和.

在系数群 G 为域的情形, 空间 H^k 和 H_k 对偶, 从而交积运算可以通过在同调群中的乘法表示. 但是对于整系数同调论而言, 交积运算更有用.

例 1 计算复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 的具实系数的上同调环. 我们已经知道了 $\mathbb{C}P^n$ 的同调群 (见 §1). 因而有 $H^{2k+1} = H_{2k+1} = 0$,

$$H^{2k}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R}) = H_{2k}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad k \leqslant n. \tag{4}$$

在 §1 中曾经指出过一个 2- 形式 c_1, 它生成 $H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R})$, 并在由它生成的多项式环中, 满足条件 $c_1^{n+1} = 0$. 根据 (4), 这个子环与整个环 $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R})$ 相同. 因此我们知道, $\mathbb{C}P^n$ 的环 $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R})$ 是一个次数为 2 的生成元 c_1 的"截尾多项式", 即

$$H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}[c_1]/\left(c_1^{n+1} = 0\right), \quad \deg c_1 = 2. \tag{5}$$

设 $f: K \to L$ 为连续映射. 不妨设此映射为胞腔映射 (见定理 4.2). 它给出了直积的映射

$$F = f \times f : K \times K \to L \times L,$$

其中 $F(x,y) = (f(x), f(y))$. 映射 F 将对角线映到对角线: $F(\triangle) \subset \triangle$, 从而把同调 (上同调) 类的张量积变到它们像的张量积. 由此有重要的结论: 因为复形 K 和 L 双方在上同调类中的乘法均由公式 $ab = \triangle^*(a \otimes b)$ 定义, 故而连续映射 f 与上同调类的乘法运算可交换, 即

$$f^*(ab) = f^*(a)f^*(b).$$

于是, $f^*: H^*(L) \to H^*(K)$ 为上同调环的同态.

可以用这个结果来讨论李群 (以及更一般的 $H-$ 空间)的上同调环, 我们知道 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §22), 一般的 $H-$ 空间 X 具有一个连续的乘法运算 $x \circ y = \psi(x,y) \in X$ (或 $\psi: X \times X \to X$), 并有一个 "同伦单位元", 即有一个特定的元 $x_0 \in X$, 使得乘以 x_0 的映射

$$\psi(x_0, x): X \to X,$$
$$\psi(x, x_0): X \to X$$

同伦于恒同映射. 我们来引进一个有用的代数定义.

定义 1 设 $H = \sum\limits_{k \geqslant 0} H^k$ 是个有单位元的分次反交换代数: $H^k H^l \subset H^{k+l}$, $yx = (-1)^{kl} xy$, 其中 $x \in H^k, y \in H^l$. 称 H 为 "霍普夫 (Hopf) 代数" 是说存在一个保持分次的同态

$$\lambda: H \to H \otimes H, \lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_k \otimes y_k,$$

其中 $0 < \deg x_i, \deg y_i < \deg x$. 通常称这个同态为代数 H 的 "对角" 映射.

例 2 设 $H = \mathbb{R}[x]$ 是实系数的变量 x 的多项式环. 我们假定元素 x 的次数为正的偶数. 我们得到了一个分次代数, 它显然满足反交换条件. 我们在 H 上给出一个霍普夫代数的结构: 让 $\lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. 于是显然有

$$\lambda(x^k) = x^k \otimes 1 + 1 \otimes x^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i \otimes x^{k-i}.$$

例 3 $H = \wedge[y]$ 为一个生成元 y 的外代数, 其中 y 的次数为正的奇数. 这是个分次反交换代数. 霍普夫代数结构为 $\lambda(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$.

例 4 自由反交换代数是在其适当的基下, 没有任何的非平凡关系的代数; 在例 1 和例 2 中的多项式代数和外代数便是这种例子. 一般的自由反称分次代数 $H = \sum\limits_{k \geqslant 0} H_k$, 其中所有 H_k 为有限维线性空间, 而 H_0 为系数域 ($H_0 = \mathbb{R}$), 它有形式

$$\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_k, \cdots] \otimes \wedge[y_1, \cdots, y_s, \cdots],$$

其中生成元 x_i 的次数 $\deg x_i$ 为偶数, y_i 的次数 $\deg y_i$ 为奇数. 简单地说, 我们有生成元 (x_j, y_q) 除去反交换性外, 它们之间没有任何非平凡的关系, 由此推出

$$y_q^2 = -y_q^2 = 0, y_i y_j = -y_j y_i, y_i x_j = x_j y_i, x_i x_j = x_j x_i;$$

我们要求具有所给次数的生成元有限. 于是在这样的代数 H 中可以以无穷多种方法 [1] 去定义霍普夫代数结构: 在其生成元上, 我们令

$$\lambda(x_j) = x_j \otimes 1 + 1 \otimes x_j + \sum \bar{u}_j^{(i)} \otimes \bar{v}_j^{(i)},$$
$$\lambda(y_q) = y_q \otimes 1 + 1 \otimes y_q + \sum \bar{\bar{u}}_q^{(i)} \otimes \bar{\bar{v}}_q^{(i)},$$

其中 $\deg\bar{u}_j^{(i)}, \deg\bar{v}_j^{(i)}, \deg\bar{\bar{u}}_q^{(i)}, \deg\bar{\bar{v}}_q^{(i)} > 0$, 并且 $\deg\bar{u}_j^{(i)} + \deg\bar{v}_j^{(i)} = \deg x_j, \deg\bar{\bar{u}}_q^{(i)} + \deg\bar{\bar{v}}_q^{(i)} = \deg y_q$ (在其他方面, 元素 $\bar{u}_j^{(i)}, \bar{v}_j^{(i)}, \bar{\bar{u}}_q^{(i)}, \bar{\bar{v}}_q^{(i)}$ 是任意的). 因为代数 H 是自由的, 由同态 λ 的乘法条件和加法性知道 $\lambda(x), \lambda(y)$ 定义了同态 $H \to H \otimes H$.

定理 2 (霍普夫 (Hopf)) H 空间 K 的上同调代数是个霍普夫代数, 即具有同态

$$\lambda : H^*(K;\mathbb{R}) \to H^*(K;\mathbb{R}) \otimes H^*(K;\mathbb{R}),$$

其中

$$\lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_i x^{(i)} \otimes y^{(i)}, \deg x^{(i)}, \deg y^{(i)} > 0,$$

而 $x \in H^q(K;\mathbb{R}), q > 0$ 为任意元. (我们假定这里的 H 空间是个胞腔复形.)

证明 因为 $H^*(K \times K;\mathbb{R}) \approx H^*(K;\mathbb{R}) \otimes H^*(K;\mathbb{R})$, 故乘法 $\psi : K \times K \to K$ 定义了一个同态

$$\psi^* : H^*(K;\mathbb{R}) \to H^*(K;\mathbb{R}) \otimes H^*(K,\mathbb{R}).$$

令 $\lambda = \psi^*$, 我们来证明这是个霍普夫代数的同态. 我们有 $\psi^* x = x^{(0)} \otimes 1 + 1 \otimes y^0 + \sum x^{(i)} \otimes y^{(i)}$, 其中 $\deg x^{(i)}, \deg y^{(i)} > 0$. 考虑包含映射 $1 \times i : K \times x_0 \subset K \times K$. 因为 $\psi(x, x_0)$ 同伦于恒同映射, 则 $(1 \times i)^* \psi^* x = x = x^{(0)} \otimes 1$. 于是 $x^{(0)} = x$; 类似地, $y^{(0)} = x$. 定理得证. □

所证的这个定理的一个应用需要用到下面的一个代数命题, 它描述了实数域上的霍普夫代数的结构.

定理 3 任意的特征为 0 的域上的霍普夫代数 (例如在有理数域, 复数域或实数域上) 是自由的反交换代数 (参看上面的例 3).

推论 任意 (有限维) 李群的上同调代数是外代数 $\wedge[y_1, \cdots, y_n]$.

推论的证明 我们考虑自由生成元 (x_j, y_q). 如果至少存在一个偶次生成元, 那么在此代数中便存在有任意大次数的元. 但是在有限维复形 (流形) 上这是不可能的. 推论得证. □

[1] 我们在这里并没有要求对角映射 λ 的 "结合性".

例 5 圆 S^1 为李群. 我们有

$$H^*(S^1;\mathbb{R}) = \wedge[y_1], \mathrm{deg} y_1 = 1.$$

例 6 我们来计算酉群 $U(n)$ 的上同调. 我们断言有等式

$$H^*(U(n);\mathbb{R}) = \wedge[y_1, y_3, \cdots, y_{2n-1}], \mathrm{deg} y_i = i.$$

证明 酉群作为流形等价于直积 $U(n) = S^1 \times SU(n)$ (参看 [1], 卷 Ⅱ, §22), 故而只需证明

$$H^*(SU(n);\mathbb{R}) = \wedge[y_3, \cdots, y_{2n-1}]. \tag{6}$$

当 $n = 2$ 时, 群 $SU(2)$ 作为流形它等同于 S^3, 故而在这时等式 (6) 是显然的.

考虑标准的纤维丛 $SU(n) \xrightarrow{SU(n-1)} S^{2n-1}$, 其中 S^{2n-1} 为群 $SU(n)$ 的齐性空间, 纤维 $SU(n-1)$ 为其迷向群.

我们从球面 S^{2n-1} 和纤维 $SU(n-1)$ 出发来构造空间 $SU(n)$ 的胞腔剖分. 先从 $n = 3$ 开始. 有纤维丛 $SU(3) \xrightarrow{SU(2)} S^5$. 我们在球面 S^5 上固定一个顶点 σ^0. 在这个点的整个原像, 即纤维 $SU(2) = S^3$ 上选取一个标准胞腔剖分 $S^3 = \sigma^0 \bigcup \sigma^3$. 在这个点的补空间 $S^5 \backslash \sigma^0$ 上, 这个纤维丛是平凡的 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §24), 于是我们可以在直积: $p^{-1}(S^5\backslash\sigma^0) = (S^5\backslash\sigma^0) \times SU(2)$ 上引进坐标. 这里 $S^5\backslash\sigma^0$ 为 5 维圆盘 D^5, 因此 $p^{-1}(S^5\backslash\sigma^0) = D^5 \times S^3$. 这个乘积空间可按下面的方式进行胞腔剖分: $D^5 \times S^3 = \sigma^5 \bigcup \sigma^8$, 其中 $\sigma^8 = D^5 \times D^3$. 因此, 群 $SU(3)$ 的胞腔剖分由四个胞腔组成: $SU(3) = \sigma^0 \bigcup \sigma^3 \bigcup \sigma^5 \bigcup \sigma^8$. 于是 $H^0(SU(3);\mathbb{R}) = H^3 = H^5 = H^8 = \mathbb{R}$, 而当 $i \neq 0, 3, 5, 8$ 时有 $H^i(SU(3);\mathbb{R}) = 0$.

根据霍普夫定理, 可选取生成元 $y_3 \in H^3(SU(3);\mathbb{R}), y_5 \in H^5(SU(3);\mathbb{R})$ 使得 $y_3^2 = y_5^2 = 0, y_3y_5 = -y_5y_3 \neq 0$ 为群 $H^8(SU(3);\mathbb{R})$ 中的生成元.

现在考虑一般的情形. 假设对于上同调群 $H^*(SU(n-1),\mathbb{R})$ 等式 (6) 已经被证明. 群 $SU(n)$ 的胞腔剖分可以由纤维丛 $SU(n) \xrightarrow{p} S^{2n-1}$ 产生, 其纤维 $F = SU(n-1)$, 并将其剖分为在纤维中有一个顶点 σ_F^0 的胞腔 σ_F^α. 在底空间的胞腔是 σ^0 和 σ^{2n-1}. 因为 $p^{-1}(\sigma^0) = F$ 和 $p^{-1}(\sigma^{2n-1}) = \sigma^{2n-1} \times F$, 故在 $SU(n)$ 中的胞腔具有形式

$$\sigma_F^\alpha \times \sigma^0, \quad \sigma_F^\alpha \times \sigma^{2n-1}. \tag{7}$$

由归纳假设, 在 $SU(n-1)$ 中的胞腔个数等于上闭链的线性无关个数, 并且也有

$$H^*(SU(n-1);\mathbb{R}) = \wedge[y_3, \cdots, y_{2n-3}].$$

我们断言胞腔 $\sigma_F^\alpha \times \sigma^0$ 和 $\sigma_F^\alpha \times \sigma^{2n-1}$ 是上闭链. 对于代表在纤维中元素 y_i 的 $(\sigma_F^\alpha \times \sigma^0)$ 是显然的, 这是因为新的胞腔的维数为 $2n-1$. 在纤维中的其他胞腔则是它们的乘积 (由归纳).

设 $y_{2n-1}=(\sigma_F^0\times\sigma^{2n-1})$, 这是只在这个新胞腔上取值的上链. 如果 δy_{2n-1} 在 $C^*(SU(n))$ 中 $\neq 0$, 那么在代数 $H^*(SU(n);\mathbb{R})$ 中我们便会得到在生成元 $y_3,\cdots,y_{2n-3}$ 外的非平凡关系. 这与霍普夫定理相矛盾. 另外, 根据霍普夫定理. 代数 $H^*(SU(n);\mathbb{R})$ 包含了外代数 $\wedge[y_3,\cdots,y_{2n-1}]$. 对每个维数, 这个代数的秩等于形如 (7) 的胞腔的个数. 于是 $H^*(SU(n);\mathbb{R})=\wedge[y_3,\cdots,y_{2n-1}]$. □

定理 3 的证明 设 $x_1,x_2,\cdots$ 为代数 H 的齐次元, $x_i\in H^{\deg x_i}, 0<\deg x_i\leqslant \deg x_j, i\leqslant j$; 又设 $\{x_j\}$ 是霍普夫代数 H 的极小生成元组. 这表明代数 H 的任意元以多项式形式 $P(x_1,x_2,\cdots)$ 表出, 这个生成元的多项式不必是唯一的, 另外这些元中任一个, 譬如 x_k, 都不能被表示为较小的 x_j 的多项式: $x_k\neq P(x_1,\cdots,x_{k-1})$. 对生成元 x_i, 我们考虑它的幂 x_i^s. 设 x_i 为使 $x_i^{s_i}=0$ 的最小的数. 例如, 对任意奇次元 x_i, 我们有 $s_i=2$. 如果生成元 x_i 的幂总不为零, 则认为 $s_i=\infty$.

我们要首先指出, 在霍普夫代数中除了形如 $x_i^{s_i}=0$ 的关系和由反交换得到的关系外没有其他的关系.

引理 单项式 $x_k^{r_k}x_{k-1}^{r_{k-1}}\cdots x_1^{r_1}, 0\leqslant r_i<s_i$ 线性无关并构成了向量空间 H 的基.

证明 任一个单项式都可化成引理所表出的形式, 这由反交换性得到, 称这样的单项式为*法式*. 法单项式的次数 (维数) 定义为 $n=r_k\deg x_k+\cdots+r_1\deg x_1$.

法单项式的线性组合称做法多项式. 需要证明, 非平凡法多项式不为零. 我们用对多项式次数的归纳来进行证明. 假定对次数小于 n 时的关于法单项式在 H 中无关性的命题已经得证. 特别由此得到, 当 a 和 b 为次数小于 n 的法单项式, 则张量积 $a\otimes b$ 在代数 $H\otimes H$ 中也是线性无关的.

设 $P(x_k,\cdots,x_1)$ 为 n 次法多项式. 把含有变量 x_k 的最高幂次的项并在一起, 并把这个幂提到括号之外, 我们得到

$$P(x_k,\cdots,x_1)=x_k^rQ(x_{k-1},\cdots,x_1)+R(x_k,\cdots,x_1), \tag{8}$$

在多项式 R 中, 变量 x_k 以较小的次数出现.

假设我们有形如 $P(x_k,\cdots,x_1)=0$ 的关系, 而其表达式 (8) 中的 r 为最小可能的这种数. 我们将证明: $r=1$ 且 Q 为常数. 设 I_{k-1} 为代数 H 的由 $x_1,\cdots,x_{k-1}$ 生成的理想. 我们于是有

$$\lambda(x_k^rQ(x_{k-1},\cdots,x_1))\equiv x_k^r\otimes Q+\sum_{i=0}^{r-1}(C_r^ix_k^i\otimes x_k^{r-i})(1\otimes Q)(\mathrm{mod} I_{k-1}\otimes H),$$

同时 $\lambda(R(x_k,\cdots,x_1))$ 不包含形如 $x_k^ia\otimes x_k^jb, i+j=r$ 的项. 如果 $\deg Q>0$, 则 $\deg x_k^r$ 和 $\deg Q$ 小于 n, 故而由归纳假设, 在 $\lambda(P(x_k,\cdots,x_1))$ 中的表达式为线

性无关. 这表明 $\deg Q=0$. 不妨设 $Q=1, r\deg x_k=n$. 如果 $r>1$, 则在表达式

$$\lambda(x_k^r)=\sum_{i=1}^{r} C_r^i x_k^i \otimes x_k^{r-i} \pmod{I_{k-1}\otimes H}$$

中出现了线性无关的项, 它们不能在 $\lambda(R(x_k,\cdots,x_1))$ 中被消去. 这表明 $r=1$, 并且关系式 (8) 具形式 $x_k=-R(x_{k-1},\cdots,x_1)$; 由于生成组的极小性, 这是不可能的. 引理证完. □

我们现在要证明, 如果 $\deg x_k$ 为偶数, 则 x_k^s 对任意的 s 都不为零. 事实上, 如果已经证明 $x_k^{s-1}\neq 0$, 则在 $\lambda(x_k^s)$ 的表达式中出现了形如 $C_s^i x_k^i\otimes x_k^{s-i}$ 的项, 它在 $0<i<s$ 时不为零. 这些项线性无关, 从而不能被在 $\lambda(x_k^s)$ 中其他项消去 (请验证!).

因此, 我们已经证明了对于霍普夫代数 H 中的极小生成元组而言, 除了反交换性外没有其他的关系. 偶次生成元在 H 中生成了多项式子代数 $\mathbb{R}[x_1', x_2',\cdots]$; 奇次元生成了外子代数 $\wedge[x_1'', x_2'',\cdots]$. 显然, 整个代数 H 是它们的张量积. 定理证完. □

我们给出其他 H 空间的例子.

例 7 如果 K 为复形, 则可以定义闭路空间 $\Omega(K;x_0)=X$, 这是以点 x_0 为起点和终点的闭路空间 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §22). 在其上定义了道路的乘法运算, 并有同伦单位元 x_0. 这个乘法是 "同伦结合" 的, 并具有 "同伦逆元" $x\to\bar{x}$:

a) 映射 $(x\circ y)\circ z: X\times X\times X\to X$ 和 $x\circ(y\circ z): X\times X\times X\to X$ 同伦;

b) 映射 $x\mapsto x\circ\bar{x}: X\to X$ 同伦于常值映射 $X\to x_0$.

例 8 除了李群外, 具单位元的乘法规则也在 7 维球面 S^7 上出现, 这可借助于凯莱 (Cagleg) 数实现. 空间 $\mathbb{R}^8$ 是个可除 (非结合) 代数. 双线性的乘法关系是: 如果 (q_1,q_2) 为一对四元数, 而 (q_1',q_2') 是另一对, 我们则令

$$(q_1,q_2)\cdot(q_1',q_2')=(q_1q_1'-\bar{q}_2'q_2, q_2'q_1+q_2\bar{q}_1'),$$
$$(q_1,q_2)^{-1}=\frac{(\bar{q}_1-q_2)}{|q_1|^2+|q_2|^2}.$$

除了李群 G 和乘积空间 $G\times S^7\times\cdots\times S^7$, 还不知道有其他的单连通有限维 H 空间的例子. 例如, 如果在球面 S^{n-1} 有乘法, 其单位元为 $x\in S^{n-1}$, 那么我们便有乘积映射

$$S^{n-1}\times S^{n-1}\xrightarrow{\psi} S^{n-1},\quad (x,y)\longrightarrow x\circ y,$$

另外我们有

$$S^{2n-1}=(D^n\times S^{n-1})\bigcup(S^{n-1}\times D^n)$$

(沿公共边缘 $S^{n-1}\times S^{n-1}$ 粘合). 映射 ψ 可以延拓为映射 f,

$$f(\psi): S^{2n-1}=(D^n\times S^{n-1})\bigcup(S^{n-1}\times D^n)\to S^n,$$

其中 S^{n-1} 是 S^n 的赤道 (请验证!)

考虑复形

$$K_n=D^{2n}\bigcup_{f(\psi)}S^n,$$

其胞腔为 $\sigma^0,\sigma^n,\sigma^{2n}$. 因此

$$H^j(K_n)=\begin{cases}0,\ j\neq 0,n,2n,\\ \mathbb{Z},\ j=0,n,2n.\end{cases}$$

设 $u_n\in H^n(K_n;\mathbb{Z}_2),u_{2n}\in H^{2n}(K_{2n},\mathbb{Z}_2)$ 为上同调的基元 (mod2) :

习题 7 证明, 如果乘法有单位元, 即 $\psi: S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ 在每个因子上的次数为 1. 则有 $u_n^2=u_{2n}$.

我们知道当 $n=1,2,4,8$ 时球面 S^{n-1} 上有乘法的例子 (分别为实数域 $\mathbb{R}$, 复数域 $\mathbb{C}$, 四元数 $\mathbb{H}$ 和凯莱数 $\mathbb{K}$). 对此有一个难证的定理 (亚当斯 (Adams)): 对于 $n\neq 1,2,4,8$, 这样的复形 K_n 不存在 (我们回忆有 $K_1=\mathbb{R}P^2,K_2=\mathbb{C}P^2,K_4=\mathbb{H}P^2,K_8=\mathbb{K}P^2$).

我们再考察一个应用上同调乘法的例子. 我们将指出群 $\pi_{2n-1}(S^n)$ 对于偶数 n 是个无限群.

考虑 $S^n\times S^n$, 其中的 n 为偶数. 在环 $H^*(S^n\times S^n)$ 中我们选取基 $1,1\otimes u,u\otimes 1,u\otimes u$, 这里的 $u\in H^n(S^n)$ 为基元. 考虑球面束的映射 $\varphi: S^n\vee S^n\to S^n$, 其中的 $S^n\vee S^n\subset S^n\times S^n$, 且 $S^n\vee S^n=(S^n\times x_0)\bigcup(x_0\times S^n)$, 在第一个因子上它的次数为 λ, 而在第二个因子上为 μ. 于是我们有 $\varphi^*(u)=\lambda(u\otimes 1)+(1\otimes u)\mu$.

因为 $u^2=0$, 故当 $\mu,\lambda\neq 0$ 时映射 φ 不能延拓到映射 $\widehat{\varphi}: S^n\times S^n\to S^n$. 这是因为由条件 $u^2=0$ 可以得到 $\widehat{\varphi}^*(u^2)=0$. 但是 $\widehat{\varphi}^*(u^2)=2\lambda\mu u\otimes u\neq 0$.$S^n\times S^n$ 的胞腔剖分为

$$S^n\times S^n=(\sigma^0\bigcup\sigma^n\bigcup\sigma^n\bigcup\sigma^{2n})=(S^n\vee S^n)\bigcup D^{2n}.$$

映射 $S^{2n-1}=\partial D^{2n}\to S^n\vee S^n\xrightarrow{\varphi}S^n$ 当 $\mu,\lambda\neq 0$ 时不可能同伦于零, 因为设若相反, 这个映射便会延拓到圆盘 D^{2n} 上, 从而到整个 $S^n\times S^n$ 上.

习题 8 证明当 n 为偶时, 数 $\lambda\mu$ 是上面给出的那个映射 $S^{2n-1}\to S^n$ 的同伦类的加法不变量.

习题 9 对任意偶数 n 及 $\lambda=2,\mu=-1$ 构造映射 $\psi: S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$.

习题 10 设 $S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n$ 在点 $x_0, x_1 \in S^n$ 为正则 (参看 [1], 卷 II, §10), 并设 $M_1^{n-1} = f^{-1}(x_0), M_2^{n-1} = f^{-1}(x_1)$ 为闭子流形. 设 $\gamma = \{M_1^{n-1}, M_2^{n-1}\}$ 为其环绕系数 (参看 [1], 卷 II, §15)[1]. 证明对于上面所构造的 $f = f(\varphi)$ 有等式 $\gamma = 2\lambda\mu$.

设复形 $K = S^n \bigcup D^{2n}$ 由映射 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 附加 D^{2n} 得到. 证明在环 $H^*(K; \mathbb{Z})$ 中成立 $u_n^2 = \gamma u_{2n}$.

习题 11 证明对任意光滑的纤维丛

$$S^{2n-1} \xrightarrow{p} S^n,$$

其环绕系数 $\gamma = \pm 1$.

§8. 斜积 (纤维丛空间) 的同调群

纤维丛的空间, 纤维和底空间的同调群之间的关联比起直积空间的情形要远为复杂. 在下文中我们假定系数群为域, 并不再每次声明了. 设有纤维丛 $E \xrightarrow{p} B$, 纤维为 F, 并设 E, B, F 全都是胞腔复形, 或者与它们同伦等价. E 的胞腔剖分已在 §7 中考虑过了: 如果 σ_F^j 为纤维 F 的胞腔, σ_B^q 为底的胞腔, 则原像 $p^{-1}(\sigma_B^q)$ 为直积 $\sigma_B^q \times F$, 从而有 E 的胞腔为

$$\sigma_E^{j+q} = \sigma_B^q \times \sigma_F^j.$$

因此, 其胞腔剖分在形式上与在直积的情形相同. 但是边缘算子的作用要复杂得多. 我们曾经举过亏格 g 的曲面上线性元空间的例子 (参看 §4), 在那里我们已见过这种复杂性. 我们列举 E 的边缘算子的几个简单性质.

1) 如果 σ_B^0 为底的顶点, 则对于胞腔 $\sigma_E^j = \sigma_B^0 \times \sigma_F^j$, 我们有显然的等式:

$$\partial\sigma_E^j = \sigma_B^0 \times (\partial\sigma_F^j)$$

2) 如果 $\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times \sigma_F^j$, 则边缘为

$$\partial\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial\sigma_F^j) + \Delta, \tag{1}$$

其中 Δ 为由整个原像 $p^{-1}(\overline{\partial\sigma_B^q})$ 的胞腔构成, 在这里 $\overline{\partial\sigma_B^q}$ 被看成是球面 S^{q-1} 像的拓扑闭包, 而 S^{q-1} 是底空间 B 中的边缘 $\partial\sigma_B^q$. 无论在什么情形下都有 $\Delta \subset p^{-1}(B^{q-1})$, 其中 B^{q-1} 为底空间的 $q-1$ 维骨架.

[1] 在 [1] 中只对 $\mathbb{R}^3$ 中的闭曲线定义了环绕系数. 我们注意到, 对在 $\mathbb{R}^{2k+1}$ (或在 S^{2k+1}) 中的子流形 M_1^k 和 M_2^k 的环绕系数, 其定义完全是类似的, 定义为这两个子流形中的一个与张在另一个上的 "膜" 的相交指数.

习题 1 设底 B 是单连通的, 有一个顶点 σ_B^0 并没有一维胞腔. 证明

$$\partial\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial\sigma_F^j) + (-1)^j(\partial\sigma_B^q) \times \sigma_F^j + \Delta_1, \tag{2}$$

其中 $\Delta_1 \subset p^{-1}(B^{q-2})$.

我们进一步假定, 所考虑的纤维丛 $E \xrightarrow{F} B$ 满足公式 (2). 例如, 这个公式显然在底空间中没有 $q-1$ 维胞腔时成立. 如果 $B = S^n (n > 1), B = \mathbb{C}P^n, B = \mathbb{H}P^n$, 还有如果 B 为格拉斯曼 (Grassmann) 复流形, 球面束, 球面的直积, 等等许多情形, 这都是成立的.

注 事实上, 我们所进行过的讨论, 以及我们所得到的结论, 在更一般的情形中也成立 (有一定的复杂性), 即: 群 $\pi_1(B)$ 在群 $H_*(F)$ 上的作用是平凡的. 对于线性元的纤维丛这意味着, 譬如底空间是个定向流形 (纤维是球面). 如果纤维是球面, 那么这个条件对于 $H_*(F, \mathbb{Z}_2)$ 自然满足, 这是因为 $H_*(S^n, \mathbb{Z}_2)$ 没有非平凡的自同构, 故 $H_*(F, \mathbb{Z}_2)$ 不依赖于底和纤维丛的定向. 当 $\pi_1(B)$ 在 $H_*(F)$ 的作用是非平凡的情形时, 有不一样的结论, 我们将在下面 §11 中指出.

因此, 我们将研究那些满足公式 (2) 的纤维丛类.

我们按底空间的骨架分次展开边缘为

$$\partial\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial\sigma_F^j) + (-1)^j(\partial\sigma_B^q) \times \sigma_F^j + \partial_2 + \partial_3 + \cdots,$$

其中 $\partial_k = \sum\limits_\alpha \lambda_\alpha \sigma_{B,\alpha}^{q-k} \times \sigma_{F,\alpha}^{j+k-1}, \lambda_\alpha$ 为底空间的 $(q-k)$ 维胞腔与纤维的 $(j+k-1)$ 维胞腔乘积的个数. 我们可写成

$$\partial\sigma_E^{q+j} = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2 + \cdots, \quad \partial_0 = \sigma_B^q \times (\partial\sigma_F^j),$$
$$\partial_1 = \pm(\partial\sigma_B^q) \times \sigma_F^j.$$

对于链复形, 我们得到

$$C_n(E) = \sum_{q+j=n} C_q(B) \otimes C_j(F).$$

边缘算子则为

$$\partial_E(a \otimes b) = a \otimes \partial_F b + (\partial_B a) \otimes b + \partial_2(a \otimes b) + \cdots, \tag{3}$$

其中

$$\partial_k(a \otimes b) \in C_{q-k}(B) \otimes C_{j+k-1}(F), a \in C_q(B), b \in C_j(F).$$

我们注意, ∂_0 和 ∂_1 在这里和在直积 $E_0 = B \times F$ 中是一样的. 算子 $\partial_k, k \geqslant 2$ 在直积 E_0 中则为零. 它们描述了在复形 $C(E)$ 和在直积 $E_0 = B \times F$ 中相比较时其边缘算子 "扭变" 的程度.

为了研究同调群 $H_*(E)$, 可利用按 $k=0,1,2,3,\cdots$ 的"过滤法"或"逐次逼近法"(称做勒雷 (Leray) 谱序列). 这个方法是这样的:

第 0 步. 因为 $\partial_0^2=0$, 我们可以只对于这个"零次逼近的边缘算子"∂_0 去计算. 我们得到

$$H_n(C(E),\partial_0)=\sum_{q+j=n}C_q(B)\otimes H_j(F)=\sum_{q+j}E^{(1)}_{q,j}.$$

因此, $H_n(C,d_0)$ 是底空间 B 上系数在纤维 F 的同调群的链, 这里的 $d_0=\partial_0$: $E^{(1)}_{q,j}=C_q(B,H_j(F))$.

第 1 步. 在模边缘 $\mathrm{Im}d_0$ 的 d_0 闭链 (即在群 $H_*(C,d_0)$) 上正确地定义算子 d_1, 使它有性质 $d_1^2=0$, 我们有复形

$$E^{(1)}=\sum E^{(1)}_{q,j},\quad d_1:E^{(1)}_{q,j}\to E^{(1)}_{q-1,j}.$$

在我们的假定中,"第一次逼近的同调群", 即对于复形 $(E^{(1)},d_1)$ 的同调群与直积的同调群相同 (参看 ∂_0 和 ∂_1 的形状):

$$\begin{aligned}H_n(E^{(1)},d_1)&=\sum_{q+j=n}H_q(B,H_j(F))=\sum H_q(B)\otimes H_j(F)\\&=H_*(B\times F).\end{aligned}$$

算子 d_1 是在底 B 上而系数在 $H_*(F)$ 的链的边缘算子.

有显然的直积分解:

$$H_n(E^{(1)},d_1)=\sum_{q+j=n}H_q(B)\otimes H_j(F),$$

这个和项代表了 $E^{(1)}_{q,j}=C_q(B,H_j(F))$ 中的 d_1 闭链 z, 准确到 d_1- 边缘 $\mathrm{Im}d_1$. 以

$$E^{(2)}_n=\sum_{q+j=n}E^{(2)}_{q,j}=\sum H_q(B)\otimes H_j(F)=H_n(B\times F)$$

表示 d_1 同调群 $H_n(E^{(1)},d_1)$.

对于直积 $E_0=B\times F$, 这个过程就到此结束. 对于斜积还有使用 $\partial_2,\partial_3,\cdots$ 的下述步骤.

第 2 步. 算子 ∂_2 诱导了"一次逼近"的同调群 $E^{(2)}=H_*(E^{(1)},d_1)$ 上的边缘算子 d_2, 它满足 $\partial_2^2=0$. 于是产生了二次逼近的同调群

$$E^{(3)}_n=H_n(E^{(2)},d_2)=\sum_{q+j=n}H_{q,j}(E^{(2)},d_2),$$

$$E^{(3)}=\sum_{n\geqslant 0}E^{(3)}_n,\quad E^{(3)}_n=\sum_{q+j=n}E^{(3)}_{q,j}.$$

我们有

$$d_2: E_{q,j}^{(2)} \to E_{q-2,j+1}^{(2)}, \quad E_{q,j}^{(2)} = H_q(B) \otimes H_j(F).$$

群 $E_{q,j}^{(3)} = H_{q,j}(E^{(2)}, d_2)$ 中的元是 $E_{q,j}^2 = H_q(B) \otimes H_j(F)$ 中的 d_2 闭链 z, 确定到 d_2- 边缘.

这个 "过滤" 的序列一直继续下去, 产生了复形 $E^{(r)} = \sum E_{q,j}^{(r)}$, 其边缘算子为

$$d_r: E_{q,j}^{(r)} \to E_{q-r,j+r-1}^{(r)}, \quad \text{以及} \quad E^{r+1} = \sum E_{q,j}^{(r+1)} = H_*(E^{(r)}, d_r).$$

显然, 当 $q < 0$ 或 $j < 0$ 时, 群 $E_{q,j}^{(r)} = 0, r \geqslant 0$. 因此, 如果 $q < r$, 则在群 $E_{q,j}^{(r)}$ 上 $d_r \equiv 0$.

在这种情形中我们有

$$E_{q,j}^{(r)} \equiv E_{q,j}^{(r+1)} \equiv E_{q,j}^{(r+2)} \equiv \cdots \equiv E_{q,j}^{(\infty)}, \quad q < r.$$

以 $E_{q,j}^{(\infty)}$ 记这些群.

定理 (勒雷)[1] 1) 所有的微分 d_r 有确定的定义, 并有 $d_r^2 \equiv 0$.

2) 直和 $E_n^{(\infty)} = \sum\limits_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}$ 同构于群 $H_n(E)$, 其中的系数群为域.

3) 群 $E_{q,j}^{(2)}$ 同构于群 $H_q(B) \otimes H_j(F)$.

因此, 作为全部过滤的最终结果, 我们得到了空间 E 的闭链 (作为所有同态 d_r 的核模去前一个同态的像), 它确定到边缘子群.

推论 在纤维丛 (斜积) 中, 同调群的秩小于底和纤维乘积空间的同调群的秩 (即对所有 k, 贝蒂数 $b_k(E) \leqslant b_k(E_0), E_0 = B \times F$).

这由 $E_n^{(2)} = H_n(E_0)$ 得到; 然后用算子 $d_2, d_3, \cdots$ "过滤" 闭链部分: 只取其核 (d_r- 闭链), 然后用 d_r 边缘去构造商群, 然后再转到 d_{r+1} 上, 等等.

我们已在群 $E_{q,j}^{(2)}$ 上定义了算子 d_2. 因为 $\partial_E = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2 + \cdots$, 并且 $\partial_E \partial_E \equiv 0$, 于是成立等式

$$\begin{aligned} 0 = \partial_E^2 = \partial_0^2 &+ (\partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0) + (\partial_1^2 + \partial_0\partial_2 + \partial_2\partial_0) + (\partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_1 + \partial_0\partial_3 + \partial_3\partial_0) \\ &+ (\partial_2^2 + \partial_3\partial_1 + \partial_1\partial_3 + \partial_0\partial_4 + \partial_4\partial_0) + \cdots . \end{aligned} \tag{4}$$

[1] 在本书所讲述过的内容中, 这个定理给了我们第一个重要的情形, 即若不真正地利用同调代数的语言便不能给出对此定理的证明.

把这个一般的等式 (4) 用到各个群 $C_{q,j}(E)$ 上, 我们便得到了一系列的等式:

$$\begin{aligned}
&0=\partial_0^2: && C_{q,j}\to C_{q,j-2},\\
&0=\partial_0\partial_1+\partial_1\partial_0: && C_{q,j}\to C_{q-1,j-1},\\
&0=\partial_1^2+\partial_0\partial_2+\partial_2\partial_0: && C_{q,j}\to C_{q-2,j},\\
&0=\partial_1\partial_2+\partial_2\partial_1+\partial_0\partial_3+\partial_3\partial_0, &&\\
&0=\partial_2^2+\partial_1\partial_3+\partial_3\partial_1+\partial_0\partial_4+\partial_4\partial_0. &&
\end{aligned} \tag{5}$$

1) 考虑在 $d_0(\partial_0=d_0)$- 闭链上算子 $\partial_1 \mathrm{mod} d_0$- 边缘的作用, 即作用在 d_0-同调群 $E^1_{q,j}$ 上.

如果 $\partial_0 x=0$, 则

$$\partial_1(x+\partial_0\bar{x})=\partial_1 x+\partial_1\partial_0\bar{x}=\partial_1 x-\partial_0(\partial_1\bar{x}).$$

于是 d_1 在 d_0- 闭链 $\mathrm{mod} d_0$- 边缘上有确定的定义. 进而由 (5) 以及 $\partial_0 x=0$, 我们得到

$$\partial_1^2 x=-\partial_0\partial_2 x-\partial_2\partial_0 x=-\partial_0\partial_2 x.$$

故而得到

$$\partial_1^2 x\equiv 0 \mod(\mathrm{Im} d_0),\quad d_1^2\equiv 0 \text{ 于 } E_*^{(1)} \text{ 上}.$$

因此, d_1 有了明确的定义, 且在 $H_*(E^{(0)},d_0)=E^{(1)}$ 上有 $d_1^2=0$.

2) 在群 $H_*(E^{(1)},d_1)=E^{(2)}$ 上构造 d_2. 在链群 $C_*(E)$ 中选取 $E^{(2)}_{q,j}$ 中的代表元 x, 使得

$$\partial_0 x=0,\quad \partial_1 x=0 \mod(\mathrm{Im}\partial_0)$$

或者

$$\partial_1 x=\partial_0 y. \tag{6}$$

链 $\partial_2 x$ 可能没有性质 (6). 我们有

$$\begin{aligned}
\partial_0\partial_2 x&=-\partial_2\partial_0 x-\partial_1\partial_1 x=-\partial_1\partial_0 y=\partial_0\partial_1 y,\\
\partial_1\partial_2 x&=-\partial_2\partial_1 x-\partial_0\partial_3 x-\partial_3\partial_0 x=-\partial_2\partial_0 y+\mathrm{Im}\partial_0\\
&=\partial_0\partial_2 y+\partial_1^2 y+\mathrm{Im}\partial_0
\end{aligned} \tag{7}$$

$(\partial_3\partial_0 x=0)$. 由关系式 (7) 知道

$$\partial_2 x-\partial_1 y=d_2 x$$

已经满足了条件 (6). 所以我们得到

$$d_2 x=\partial_2 x-\partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x+[\mathrm{Im}\partial_0+\partial_1(\mathrm{Ker}\partial_0)].$$

又有

$$\partial_1\partial_2 x = \partial_0(\partial_2 y - \partial_3 x).$$

我们来验证 $d_2 x$ 定义的合理性.

设 $x \to x + \partial_0 z + \partial_1 v = \tilde{x}(\partial_0 v = 0)$; 于是

$$\begin{aligned}
&\partial_2\tilde{x} - \partial_1^{-1}\partial_0\partial_1^{-1}\tilde{x} = \partial_2 x + \partial_2\partial_0 x + \partial_2\partial_1 v\\
&= (\partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x) - \partial_0\partial_2 z - \partial_1^2 z - \partial_1\partial_2 v - \partial_0\partial_3 v\\
&\quad -\partial_3\partial_0 v + \partial_1^2 z + \partial_1(\partial_0^{-1}\partial_0\partial_2 v + \partial_0^{-1}\partial_2\partial_0 v)\\
&= (\partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x) + \mathrm{Im}\partial_0 + \partial_2(\mathrm{Ker}\partial_0)
\end{aligned}$$

$(\partial_3\partial_0 v = \partial_1\partial_0^{-1}\partial_2\partial_0 v = 0)$. 于是 d_2 在 $E_{q,j}^{(2)}$ 上定义合理. 现在来验证在 $E_{q,j}^{(2)}$ 上 $d_2 d_2 = 0$. 如果 $\partial_0 x = 0, \partial_0 y = \partial_1 x$, 于是我们有

$$\begin{aligned}
d_2 x &= \partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x,\\
d_2^2 x &= \partial_2(\partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_2 x) - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1(\partial_2 x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1 x)\\
&= -\partial_0\partial_4 x - \partial_4\partial_0 x - \partial_1\partial_3 x - \partial_3\partial_0 y - \partial_2\partial_1 y - \partial_1(\partial_2 y - \partial_3 x)\\
&= -\partial_0(\partial_4 x + \partial_3 y) = \mathrm{Im}\partial_0
\end{aligned}$$

$(\partial_4\partial_0 x = 0)$. 于是, 算子 $d_2 = \partial_2 - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1$ 在群 $E_{q,j}^{(2)}$ 上有合理的定义, 并具有性质 $d_2 d_2 = 0$.

3) 类似地定义群 $E_{q,j}^{(3)} = H_{q,j}(E^{(2)}, d_2)$ 上的算子 d_3, 即利用算子 ∂_3 作用在链 $x \in C_{q,j}(E)$ 上, 使得 $\partial_0 x = 0, \partial_1 x = \partial_0 y, \partial_2 x - \partial_1 y = \partial_0 z + \partial_1 w$, 其中 $\partial_0 w = 0$(d_2- 闭链), 并在 d_i 的像的并的范围内确定, 其中 $i \leqslant 2$, 即所有前面已定义过的算子 d_i 的边缘. 不用进行计算便可立即指出, 所有的算子 d_r 可由对从 $C_{q,j}$ 到 $C_{q-r,j+r-1}$ 的算子 ∂_r 进行修正得到, 就像 d_2 的情形那样, 补充 $\partial_0, \partial_1, \cdots, \partial_{r-1}$ 的像中的元来做到这一点. 于是我们就会有 $d_r d_r = 0, d_r : E_{q,j}^{(r)} \to E_{q-r,j+r-1}^{(r)}$. 算子 d_r 的精确形式对我们来说并不重要.

我们现在来描述一下对勒雷定理 (见前面) 的证明思路, 但只在所有 ∂_i 当 $i \geqslant 3$ 为平凡的特殊情形下给出. 这时不用借助于同调代数便可以直接计算的办法来验证这个定理的正确性. 算子 d_2 的合理性前面已经证明过了. 需要证明的是同调群 $H_*(E^{(2)}, d_2) = H_*^{(3)} = E_*^{(\infty)}$ 与在系数域上的同调群 $H_*(E)$ 相同.

设 x 为 $H_n(E)$ 中元, 它的代表闭链为 $C_n(E) = \sum\limits_{q+j} C_{q,j}(E)$ 中的链 $\bar{x}$. 我们称数 q 为元素 $x \in H_*(E)$ 的 "滤标" 是说它是使 x 有在整个原像 $p^{-1}(B^q)$ 中的代表元 $\bar{x}$ 的最小的数 q, 其中 B^q 为底空间的 q 维骨架; 从而 x 不能由 $p^{-1}(B^{q-1})$ 中的链来实现:

$$\bar{x} = x_q + x_{q-1} + \cdots + x_0 = x_q + \Delta, \quad \Delta \in p^{-1}(B^{q-1}),$$

其中

$$x_q \in C_{q,j}, x_{q-1} \in C_{q-1,j+1}, \cdots, x_0 \in C_{0,n}.$$

因为 $\partial_E \bar{x} = 0, \partial_E = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2$, 于是我们按群 $C_{q,j}$ 展开 $\partial_E \bar{x}$, 便有

$$\partial_E \bar{x} = \partial_0 x_q + (\partial_1 x_q + \partial_0 x_{q-1}) + (\partial_2 x_q + \partial_1 x_{q-1} + \partial_0 x_{q-2}) \\ +(\partial_2 x_{q-1} + \partial_1 x_{q-2} + \partial_0 x_{q-3}) + \cdots = 0.$$

那么条件 $\partial_E \bar{x} = 0$ 给出了

$$\partial_0 x_q = 0, \partial_1 x_q = -\partial_0 x_{q-1}, \partial_2 x_q = -\partial_1 x_{q-1} - \partial_0 x_{q-2}.$$

由此得出结论: 因为

$$d_0 x_q = \partial_0 x_q = 0, d_1 x_q = \partial_1 x_q = -\partial_0 x_{q-1},$$
$$d_2 x_q = \partial_2 x_q - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x_q = \partial_2 x_q + \partial_1 x_{q-1} = -\partial_0 x_{q-2},$$

则链 x_q 为微分 d_0, d_1, d_2 的闭链. 因此, 滤标为 q 的闭链 x 对应了链 $x_q \in C_{q,j}(E)$, 这个 x_q 定义了所有微分 d_r 的闭链, $r = 0, 1, 2, \cdots$. 故而 x_q 留在了群 $E_{q,j}^{(\infty)}$ 内 (在我们现在的情形中 $E^{(\infty)} = E^{(3)}$). 我们将证明, x_q 不是任何一个微分 $d_r (r = 0, 1, 2)$ 的边缘, 从而给出了 $E_{q,j}^{(\infty)}$ 中的非零元. 如果 $x_q = \partial_0 z = d_0 z$ 其中 $z \in C_{q,j+1}$, 则因为

$$\widetilde{x} = (x_q - \partial_0 z) + (x_{q-1} - \partial_1 z) + \cdots,$$

其中 $x_q - \partial_0 z = 0$, 于是我们知道元素 $\tilde{x} = x - \partial_E z$ 的滤标小于 q. 由于 q 的极小性条件, 以及闭链 x 不能离开骨架 B^q , 所以 $x_q \neq \partial_0 z$. 设 $x_q = d_1 v$, 其 $\partial_0 v = 0, v \in C_{q+1,j}$. 容易验证闭链 $x - \partial_E v$ 有一个小于 q 的滤标, 故而 $x_q \neq d_1(\mathrm{Ker} d_0)$. 又如果对 $w \in C_{q+2,j-1}$ 有 $x_q = d_2 w = \partial_2 w - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 w$ (其中 $\partial_0 w = 0, \partial_2 w = \partial_0 u$), 则 $\tilde{x}$ 可保持在 q 维骨架中 $\tilde{x} \to \bar{x} - \partial_E w$. 这个矛盾证明, 如果同调类 $x \in H_{q+j}(E)$ 的滤标恰好等于 q, 则对所有微分都是闭链的 $x_q \in C_{q,j}(E)$ 转化到 $E_{q,j}^{(\infty)}$ 中, 并在其中不为零. 故而有分解式

$$H_n(E) \to \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}.$$

反之, 设给出对所有微分 d_r 为闭链的 $x_q \in C_{q,j}(E)$, 并且它在 $E_{q,j}^{(\infty)}$ 中不为零. 于是成立下面的关系 (设在 $i \geqslant 3$ 时所有 $\partial_i = 0$):

$$\partial_0 x_q = 0, \partial_1 x_q = \partial_0 y, \partial_2 x_q - \partial_1 y = \partial_0 z + \partial_1 w, \partial_0 w = 0,$$
$$z \in C_{q-2,j+2}, \quad y \in C_{q-1,j+1}, \quad w \in C_{q-1,j+1}.$$

令

$$\tilde{x} = x_q + x_{q-1} + x_{q-2} + x_{q-3} + \cdots,$$

其中 $x_{q-1} = -(y+w), x_{q-2} = -z$,

$$\partial_E \tilde{x} = \partial_0 x_q + (\partial_1 x_q - \partial_0 y - \partial_0 w) + (\partial_2 x_q - \partial_0 z - \partial_1 y - \partial_1 w) + \Delta = \Delta,$$

这里的 $\Delta \in p^{-1}(B^{q-3})$. 改变代表元 x_q, 还有 y, w, z, 由关系 (4)—(5), 我们得到在条件 $\partial_i \equiv 0, i \geqslant 3$ 下, 闭链 $\tilde{\tilde{x}}$ 的滤标为 q.

因此, 群 $E_n^{(\infty)} = \sum\limits_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}$ 中每一个元素都由 $H_n(E)$ 中的元表示. 故而在这个特殊情形下的勒雷定理得证. □

补充 (无证明)

1) 滤标 $q=0$ 的元素对于所有 $d_r, r \geqslant 1$ 总为闭链; 群 $E_{0;n}^{(1)}$ 同构于 $H_n(E)$. 群 $E_{0,n}^{(\infty)}$ 为商群: 同态 $H_n(F) \to E_{0,n}^{(\infty)} \subset H_n(E)$ 与纤维的包含映射 $i: F \to E$ 诱导的同态相同.

2) 滤标 n 的元素 $(j=0)$ 不可能是边缘; 这里的 $E_{n,0}^{(2)} = H_n(B), E_{n,0}^{(\infty)} \subset H_n(B)$.

到 $j=0$ 项的投射映射

$$\sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)} = H_n(E) \to E_{n,0}^{(\infty)} \subset H_n(B)$$

与到底空间的投射

$$p_*: H_n(E) \to H_n(B)$$

相同.

3) 对于上同调完全类似. 有序列 $(E_r^{q,j}, \delta_r)$ 满足

a) $\delta_r: E_r^{q,j} \to E_r^{q+r,j-r+1}, \delta_r\delta_r = 0, E_{r+1}^* = H^*(E_r, \delta_r)$;

b) $\sum\limits_{q+j=n} E_2^{q,j} = H^n(B \times F) = \sum H^q(B) \otimes H^j(F)$;

c) $\sum\limits_{q,j} E_\infty^{q,j} = H^*(E)$ (作为群);

d) 所有的群 E_r^* 和算子 δ_r 与 $(E_*^{(r)}, d_r)$ 在同调范围内对偶, 但在这里有新的性质;

e) 所有 $E_r^* = \sum E_r^{q,j}$ 是个反交换环, 作为环, $H^*(B \times F) = E_2^*$; 如果 $\alpha \in E^{q,j}, \beta \in E^{\bar{q},\bar{j}}$, 则 $\alpha\beta \in E^{q+\bar{q},j+\bar{j}}, \alpha\beta = (-1)^{(q+j)(\bar{q}+\bar{j})}\beta\alpha$; 对于 δ_r 成立莱布尼茨公式

$$\delta_r(\alpha\beta) = (\delta_r\alpha)\beta \pm \alpha(\delta_r\beta)$$

(注意, 一般说来, 环 E_∞^* 并不同构于 $H^*(E)$; 一个例外的情形是 E_∞^* 为自由反交换代数时, $H^*(E)$ 也同样是这样的代数).

我们将不证明上面这些命题, 然而在下面的计算中却会运用它们 (特别是 (e)).

让我们选取一些应用勒雷定理的例子. 我们将清楚看到, $r \geqslant 2$ 的算子 d_r 的结构在计算中并没有多少用, 重要的是它们的性质.

例 1 设有标准的纤维丛 $E = S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n = B$, 纤维 $F = S^1$ (参看 [1], 卷 II, §24). 我们利用有关 $H^*(S^1), H^*(S^{2n+1})$ 的信息和 $\pi_1(B) = 0$ 的条件去计算环 $H^*(\mathbb{C}P^n)$.

项 E_2^* 等于 $H^*(B) \otimes H^*(F)$, 见图 43(其中有 $j = 0, 1$ 时 $E_2^{q,j}$ 的所有非零胞腔). 这里 $H^*(S^1) = \wedge[u], u^2 = 0, \deg u = 1$, 而 $H^*(B)$ 除了 $\pi_1 = 0$ 的条件外其他未知. 群 $E_2^{q,j}$ 只在 $j = 0, 1$ 时非平凡. 因为 $\delta_r E_r^{q,j} \subset E_r^{q+r,j-r+1}$, 故考虑到维数, 我们知道只有 $\delta_2 \neq 0$, 而 $i \geqslant 3$ 时 $\delta_i \equiv 0$. 群 $E_r^{q,0}$ 对所有 $r \geqslant 2$ 时是对所有 δ_r 的闭链. 元素 $\delta_2(u) \in H^2(\mathbb{C}P^n) = E_2^{2,0}$ 生成了群 $H^2(\mathbb{C}P^n)$; 否则我们或者有 $H^1(E) = H^1(S^1) \neq 0$, 或者 $H^2(E) \neq 0$, 这是不可能的. 现设 $v = \delta_2(u) \neq 0$, 则对于 uv 成立

$$\delta_2(uv) = v^2, \quad \delta_2(uv^k) = v^{k+1}.$$

由 $i \leqslant 2n$ 时 $H^i(E) = 0$ 的条件, 我们得到 $H^{2j+1}(\mathbb{C}P^n) = 0$, 而 $H^{2j}(\mathbb{C}P^n)$ 为 $j \leqslant n$ 时由 v^j 生成的一维空间. 在这里我们利用了微分 δ_2 的环性结构 (见图 43).

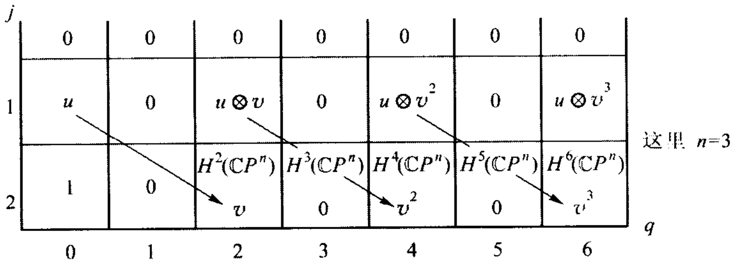


图 43

例 2 设 $E \xrightarrow{p} S^n$ 为塞尔 (Serre) 纤维丛, 其纤维 $F = \Omega(S^n, x_0)$ (球面上的道路). 这时 E 可缩, 从而 $H_*(E) = 0$. 对于底 $B = S^n$, 我们知道 $H_0(S^n)$ 和 $H_n(S^n)$ 是一维空间; 其余的 $H_j(S^n) = 0, j \neq 0, n$. 纤维的同调群暂时还不知道.

项 $E_{q,j}^2 = H_q(B) \otimes H_j(F)$ (见图 44) 有唯一的非平凡微分

$$\begin{aligned} &d_n : v \to u_1, \\ &d_n : v \otimes u_1 \to u_2, \\ &\cdots\cdots \\ &d_n : v \otimes u_{k-1} \to u_k. \end{aligned} \tag{8}$$

(8) 的微分 d_n 的形式可立即由勒雷定理得到, 这只要用到条件 $H_*(E)=0$ 和底 $B=S^n$ 的上同调形式即可. 因此对于同调群 $H_*(F)$ 我们有

$$H_{k(n-1)}(F) \text{ 为一维空间,}$$
$$H_j(F)=0,\quad j\neq k(n-1).$$

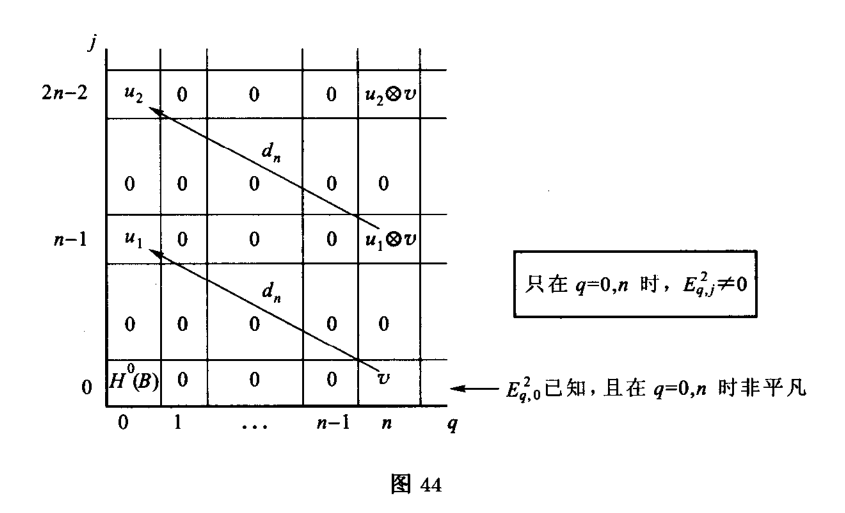


图 44

习题 2 应用上同调的乘法证明 (系数在域 $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Q}$ 中):

a) $H^*(\Omega(S^n))$ 在 n 为奇数时等于由一个生成元 u 的多项式环, u 的次数为 $n-1$;

b) 如果 n 为偶数, 则 $H^*(\Omega(S^n))=\wedge[u]\otimes\mathbb{R}[v], \deg u=n-1; \deg v=2n-2$.

习题 3 证明, 如果空间三元组 (E,F,B) 中任意两个具有下列性质之一, 则第三个也具有此性质 (假设纤维丛 $E\xrightarrow{p}B$ 满足勒雷定理的条件):

a) 系数为任意域时的同调群 H_* 等于零;

b) 每个维数的同调群 H_* 具有有限个生成元;

c) 所有整系数同调群为有限群 (即系数群为 $\mathbb{R},\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{C}$ 的域时的同调群等于 0);

d) 所有整系数同调群为有限群且不含 p 阶元, 其中 p 为奇数 (即以域 $\mathbb{Z}_p$ 为系数的同调群为零).

习题 4 研究在下列纤维丛中的微分算子 d_r,δ_r. 在 b)—g) 的例子中, 利用上同调的环结构.

a) $\mathbb{R}P^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ (纤维 S^1), 系数域 $\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_p(p>2),\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$;

b) $SU(n)\to S^{2n-1}$ (纤维 $SU(n-1)$);

c) $SO(n) \to S^{n-1}$ (纤维 $SO(n-1)$);
d) $S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$ (纤维 S^3);
e) $V_{n,k} \to S^{n-1}$ (纤维 $V_{n-1,k-1}$);
f) $V_{n,k}^{\mathbb{C}} \to G_{n,k}^{\mathbb{C}}$ (纤维 $U(k)$);
g) $V_{n,k}^{\mathbb{R}} \to G_{n,k}^{\mathbb{R}}$ (纤维 $SO(k)$).

习题 5 证明下面的断言:

a) 如果单连通复形 K 的所有同调群为有限群 (即 $H_q(K,\mathbb{R})=0, q>0$), 则所有同伦群也有限;

b) 群 $\pi_{n+i}(S^n)$ 有限 (但如果 n 为偶数, 应除去 $i=0$ 和 $i=n-1$ 的情形).

提示. 考虑塞尔纤维丛 $E \xrightarrow{p} K$, 纤维为 $\Omega(K,k_0)$, 这里 E 可缩. 迭代构造这个纤维化. 为了研究群 $\pi_i(K)$, 我们利用等式 $\pi_i(K)=\pi_{i-1}(\Omega(K))=\cdots$. 对于第一个非平凡的同伦群, 我们应用下面的事实: 如果 $\pi_q(X)=0, q<i$, 则 $\pi_i(X)=H_i(X,\mathbb{Z})$. 如果遇到非平凡的群 π_1 则转移到万有覆叠空间上去讨论 (参看下面的习题 7).

有一个在保持同伦型不变下, 把 "一个映射转化为纤维丛投射" 的过程:

a) 如果 $K \subset L$ 为包含映射, 则考虑空间 $E(K,L)$, 它由在 K 中出发, 而终点在 L 的任意处的道路组成. 显然 $E(K,L) \sim K$ (收缩于 K). 我们有映射 $E(K,L) \xrightarrow{p} L$, 将每条道路映到它的终点. 我们得到了一个塞尔纤维丛 (请证明!);

b) 对于一般的映射 $K \xrightarrow{f} L$ 需要考虑 "映射柱" $C_f=(K\times I)\bigcup_f L, I=[0,1], (x,1)\cong f(x)$. 显然, $C_f \sim L$. 另外, $C_f \supset K\times 0 = K$. 化到了 a) 中偶对 $(C_f, K\times 0)$ 的情形, 得到了纤维丛

$$K \sim E(K,L) \to C_f \sim L.$$

容易看出 p 同伦于 f.

利用这些构造, 解答下面问题:

习题 6 证明, 如果单连通复形间映射 $K \xrightarrow{f} L$ 诱导了同调群的同构 $H_*(K;\mathbb{R}) \xrightarrow{\approx} H_*(L;\mathbb{R})$, 则 f 也诱导了同伦群同构

$$\pi_i(K)\otimes\mathbb{R} \approx \pi_i(L)\otimes\mathbb{R}.$$

将这个情形应用于 $K=S^3\times S^5\times\cdots\times S^{2n-1}, L=SU(n)$, 并利用 $SU(n)$ 的乘法构造映射 $K\to L$.

习题 7 如果 X 为 H 空间 (例如, $X=\Omega(K)$), 则对所有 $q>0$ 有等式

$$H_q(\hat{X},\mathbb{R}) = H_q(X,\mathbb{R}),$$

其中 $\hat{X}$ 为其万有覆叠空间. 请证明这个结论.

提示. 设 $D = \pi_1(X), K(D,1) = B$ 是那样的空间, 它使 $\pi_1(B) = D, \pi_i(B) = 0, i > 0$ (见后面的 §10). 考虑映射 $X \xrightarrow{f} B, \pi_1(X) \approx \pi_1(B) = D$. 把它转化为纤维丛. 求其纤维.

习题 8 考虑自然的包含映射 $S^n \vee S^n \to S^n \times S^n$. 将其转化为纤维丛. 求纤维 F 的同调群. 求同伦群 $\pi_i(S^n \vee S^n) \otimes \mathbb{R}$.

习题 9 设 X 为单连通, $H^*(X, \mathbb{R})$ 为自由代数 (反交换). 求群 $\pi_1(X) \otimes \mathbb{R}$.

习题 10 设 $\pi_i(X) = 0, i \leqslant n-1$. 证明在 $j \leqslant 2n-1$ 时 $H_j(X, \mathbb{R}) \cong \pi_j(X) \otimes \mathbb{R}$.

§9. 映射的延拓问题, 同调与截影. 障碍的上同调类

先考虑下述问题: 设给了一个胞腔复形 K 及其子复形 $L \subset K$ (例如 $L = K^{i-1}$, 即 K 的骨架). 又设给出了映射 $f: L \to X$. 为了在代数方面能够简单一些, 我们假设 X 是单连通的空间 (或者在同伦上是单纯的, 意思是说 $\pi_1(X)$ 为阿贝尔群, 并在所有群 $\pi_i(X)$ 上的作用是平凡的, 其中 $i > 0$) 是否可以把映射 $f: L \to X$ 延拓为映射 $F: K \to X$?

设 σ^i 为 K 中的胞腔, 使得 $\partial\sigma^i \subset L$. 在边缘 $\partial\sigma^i$ 上已有了映射 $f: L \to X$. 这个映射定义了一个元 $\alpha(\sigma^i, f) \in \pi_{i-1}(X)$:

$$S^{i-1} \to \partial\sigma^i \to X.$$

显然, 映射 f 可以延拓到胞腔 σ^i 上当且仅当 $\alpha(\sigma^i, f)$ 在 $\pi_{i-1}(X)$ 中等于零. 特别, 如果 $\pi_{i-1}(X) = 0$ 则这种延拓总是可能的. 如果 $\alpha(\sigma^i, f) \neq 0$, 那么映射 f 便不能延拓到胞腔 σ^i 上 (α 是个 "障碍").

在一般的情形中, 从某个维数开始延拓一个映射, 在这个维数上有 K 中的那些不在 L 中的胞腔, 从而在某个维数 i 时遇到了某个非平凡的 "障碍":

$$\sigma^i \to \alpha(\sigma^i, f) \in \pi_{i-1}(X).$$

这是个 (K, L) 上的上链或者说在上链群 $C^i(K, L, \pi_{i-1}(X))$ 中. 以 α_f 记这个上链.

有下面的论断.

引理 1 上链 α_f 是个上闭链.

证明 按定义我们有 $\delta\alpha_f(\sigma^{i+1}) = \alpha_f(\partial\sigma^{i+1})$. 我们来证明上链 α_f 在 $\partial\sigma^{i+1}$ 上化为零. 我们知道, $\alpha_f(\sigma^i)$ 是由映射 $\partial\sigma^i \to X$ 定义的. 为简明起见, 设 K

和 L 是单纯复形; 于是 $\partial\sigma^{i+1}, \partial\sigma^i$ 为 K 中的球面, 这里的 σ^q 为 q 维单形. 于是有了下面的普遍情形: 对于单形 σ^{i+1} 存在从其 $(i-1)$ 维骨架到 X 的映射 ($\pi_1(X)=0$, 或者 π_1 在群 π_{i-1} 上的作用为平凡). 设 $\alpha_j \in \pi_{i-1}(X)$ 表示此映射在编号为 j 的边缘上的限制. 如果 $\sigma^{i+1}=(0,\cdots,i+1)$, 则第 j 个边缘是 $(0,1,\cdots,\hat{j},\cdots,i+1)$ (去掉了 j). 由下面的习题得到了引理的证明. □

习题 1 证明等式

$$\sum_{j=0}^{i+1}(-1)^j\alpha_j = 0 \in \pi_{i-1}(X), \forall x. \tag{1}$$

提示. 每个 $i-1$ 维边缘出现在和式 (1) 中两次, 并带有相反的符号 (群 $\pi_{i-1}(X)$ 为阿贝尔). 由 π_1 的平凡作用条件知道在 $\pi_{i-1}(X)$ 的定义中其起始点并不是本质的. 因此 α_f 是个闭上链.

引理 2 如果 $\alpha_f=\delta\beta$, 其中的 β 为 $C^{i-1}(K,L,\pi_{i-1}(X))$ 中的某个上链, 于是映射 f 可以在 $(i-1)$ 骨架 K^{i-1} 上变化并且在 $(i-2)$ 维骨架 K^{i-2} 和在整个 L 上不变, 使得对新的映射 $\tilde{f}$ 满足 $\alpha_{\tilde{f}}\equiv 0$.

证明 在引理的条件下, 我们在胞腔 σ^{i-1} 上改变 f 为新的映射 $\tilde{f}:\sigma^{i-1}\to X$, 使得它们在 $\partial\sigma^{i-1}$ 上相同; 这时这两个在胞腔 σ^{i-1} 上的映射 $f,\tilde{f}$ 合在一起定义了一个映射 $S^{i-1}\to X$, 它给出了在群 $\pi_{i-1}(X)$ 中的元 $-\beta(\sigma^{i-1})$. 在映射 f 这样变化后, 对新的映射 $\tilde{f}$ 我们便有了 $\alpha_{\tilde{f}}=\alpha_f-\delta\beta\equiv 0$. 引理得证. □

运用引理 1 和 2, 我们得到了

结论 对于映射 $f:L\to X$, 定义从子复形 $L\bigcup K^{i-1}$ 到复形 $L\bigcup K^i$ 延拓的 "第一障碍" 为 $\alpha_f\in C^i(K,L;\pi_{i-1}(X))$. 存在这个延拓的充分条件是 α_f 等于零 (参看引理 2). 显然, 如果 $\pi_{i-1}(X)=0$, 则此延拓是可能的.

习题 2 设当 $i>q$ 时 $\pi_q(X)=0$, 并且 $f:K^q\to X$ 为 q 维骨架上的映射. 设 X 没有维数在 $0<p<q-1$ 的 p 维胞腔 (即简约复形, 参看 §4). 于是对任意一个复形 K 中胞腔 σ^q, 映射 f 的限制: $\sigma^q\to X$ 定义了一个元 $\beta(\sigma^q)\in\pi_q(X)$. 证明这个映射延拓到骨架 K^{q+1} 上的障碍是上链 $\alpha_f=\delta\beta$. 特别, 如果 β 为上闭链, 则映射 f 可延拓到 K^{q+1} 上.

我们现在考虑在骨架 K^{q-1} 上相等的两个映射 f 和 $g:K\to X$ 的"同伦障碍". 在骨架 K^q 中任一个胞腔 $\sigma^q\subset K^q$ 上有了两个映射 $f,g:\sigma^q\to X$, 它们在边缘上相等: $f|_{\partial\sigma^q}=g|_{\partial\sigma^q}$. 映射 f 和 g 联合起来给出了球面上的映射 $S^q\to X$, 它给出了 "差异元素" $\alpha(\sigma^q,f,g)\in\pi_q(X)$. 因此我们有了一个 "差异上链"

$$\alpha(\sigma^q,f,g)\in\pi_q(X).$$

习题 3 证明 $\delta\alpha = 0$. 证明对于条件 $\alpha = \delta\beta$, f 和 g 之间的同伦可以在骨架 K^{q-1} 上变化而在骨架 K^{q-2} 上不变, 故而得到的 $\alpha \equiv 0$. 因此差异上链属于 $H^q(K, \pi_q(X))$.

习题 4 设存在偶对 $(K, L), L \subset K$, 以及给出了映射 $f : L \to T^n$, 其中 T^n 为 n 维环面. 映射 f 从 L 延拓到 K 的必要条件是: 如果 $\gamma \in \pi_1(L)$, 使包含映射 $i : L \to K$ 把这个元素转变为单位元: $i_*(\gamma) = 1$, 则在环面 T^n 上有 $f_*(\gamma) = 1$. 证明这个条件对延拓也是充分的. 证明, 使映射延拓的充分条件也是一个在同调中的相似条件, 就是说 $\gamma \in H_1(L)$. 这样的条件出现, 譬如在扭结理论 (参看 [1], 卷 II, §26) 中.

习题 5 求 $K \to T^n$ 的映射同伦类的集合 $\pi(K, T^n)$ (或记为 $[K, T^n]$) (特别, $n = 1$ 时为到 S^1 的映射). 更一般地: 设 $X = K(D, n)$ 为这样的空间, 使 $\pi_i(X) = 0, i \neq n, \pi_n(X) = D$ 为阿贝尔群 (艾伦贝格 - 麦克莱恩 (Eeilenberg – Maclane) 复形). 证明, $\pi(K, X) = H^n(K, D)$. 对 $n = 1$, 验证 $H^1(K, D)$ 和 $\pi(K, X)$ 都由同态 $\pi_1(K) \to D$ 定义. 这个关于 $\pi(K, X)$ 的结果在 $n = 1$ 时对非阿贝尔群 D 也对, 例子:

$n = 1:$

$D = \mathbb{Z},\ \ K(\mathbb{Z}, 1) = S^1,$

$D = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z},\ \ K(D, 1) = T^n,$

$D = \pi_1(M_g^2),\ \ K(D, 1) = M_g^2$ (亏格 $g \geqslant 1$ 的曲面),

$D = \mathbb{Z}_m,\ \ K(D, 1) = S^\infty/\mathbb{Z}_m$ ($m = 2$ 时 $K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty$ 或 $\mathbb{R}P^N, N \to \infty$),

$D = F$ (自由群), $K(F, 1) = S^1 \vee \cdots \vee S^1$ (圆束).

具不同群 $D = \pi_1(X)$ 的空间 $K(D, 1)$ 的例子非常多. 在 $n > 1$ 时唯一能被简单构造的 $K(D, n)$ 空间是 $n = 2, D = \mathbb{Z}$ 的情形, 这时的 $K(D, 2) = \mathbb{C}P^\infty = S^\infty/S^1$ (参看 [1], 卷 II, §24).

习题 6 设 K^n 为 n 维的复形. 求映射 $K^n \to S^n$ 的同伦类. 证明等式

$$\pi(K^n, S^n) = H^n(K^n, \mathbb{Z}).$$

关于纤维为 F 的纤维丛 $E \xrightarrow{p} B$, 的截影的结构和同伦问题是完全类似的, 在这里底空间 B 具有单纯复形或胞腔复形的结构. 又为了简化起见, 我们假设底空间 B 是单连通的 (或者, 一个更弱的假设, 即 $\pi_1(B)$ 在 $\pi_1(F)$ 的作用是可迁的), 而且纤维 F 也是单连通的或者至少在同伦上是单纯的.

设已给出了在骨架 $B^{q-1} \subset B$ 上的截影 φ. 在单形 $\sigma^q \subset B^q$ 上有直积 $p^{-1}(\sigma^q) = \sigma^q \times F$. 在边缘 $\partial\sigma^q = S^{q-1}$ 上有截影 $\varphi : \partial\sigma^q \to \partial\sigma^q \times F$, 其中

$p\varphi = 1$. 所以定义了映射 $\partial\sigma^q = S^{q-1} \to F$, 它给出了元素 $\alpha(\sigma^q, \varphi) \in \pi_{q-1}(F)$ (障碍上链).

习题 7 证明 $\delta\alpha = 0$.

习题 8 证明对 $\alpha = \delta\beta$, 则可以在骨架 B^{q-1} 上改变这个截影但在 B^{q-2} 上不变, 从而使新的 $\alpha \equiv 0$. 于是 $\alpha \in H^q(B, \pi_{q-1}(F))$.

习题 9 设纤维 $F = S^{q-1}$ 为球面. 证明障碍 $\alpha \in H^q(B, \pi_{q-1}(F))$ 就是这个纤维丛的 "欧拉类"(参看 [1], 卷 II, §25), 它以结构群 G 为 $SO(q)$ 的纤维丛的联络来给出定义; 当 $q-1$ 为奇数时是 $H^q(B; \mathbb{R})$ 中的元.

习题 10 考虑两个截影 φ_1 和 $\varphi_2 : B \to E, p\varphi_1 = p\varphi_2 = 1$. 设这两个截影在骨架 $B^{q-1} \subset B$ 上相等. 请给出同伦障碍的定义

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \in H^q(B, \pi_q(F)),$$

并研究其性质.

例 1 设纤维为可缩, 即对所有 i 有 $\pi_i(F) = 0$; 于是总存在这种纤维的截影, 而且这些截影都相互同伦.

例如:

a) F 为流形 M^n 上 (在给定点) 的正定黎曼度量的集合. 我们知道 (参看 [1], 卷 II, §8), 这时截影总是存在的, 即 M^n 上的一个度量, 并且任意两个截影 (两个正定度量) 为同伦, 即它们可以用道路相连接 (相互形变). 如果度量是不定型的 (譬如 (p,q) 型), 则这个结果不再正确. 这种情况的群 $\pi_i(F)$ 是什么? 注意, $F = GL(n, \mathbb{R})/O(p,q), p+q = n$.

b) F 为纤维丛 $E \to B$ 上每点上的 "水平面积元" 的集合或联络的集合 (参看 [1], 卷 II, §24, 在那里证明了联络的存在性).

例 2 设 $E \xrightarrow{p} B$ 是以 $G = O(n)$ 为结构群的纤维丛, 纤维为 $\mathbb{R}^n$. 考虑相伴的 k- 标架 (法正交) 的纤维丛: $E_k \xrightarrow{p} B$, 纤维 $F_k = V_{n,k}$ ($\mathbb{R}^n$ 中的 k- 标架的斯蒂弗尔 (Stiefel) 流形). 特别对于 $k = n$, 我们有 $F_n = O(n), k = 1$ 时有 $F_1 = S^{n-1}$. 关于纤维同伦群的信息可由 [1], 卷 II, §24 得到:

$$\pi_i(V_{n,k}) = 0, i < n-k,$$

$$\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n-k \text{ 为奇数}, \\ \mathbb{Z}_2, & n-k \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

对这类纤维丛可以构造截影的障碍上同调类它有形式 ("第一障碍")

$$\alpha_k \in H^{n-k+1}(B, \pi_{n-k}(V_{n,k})),$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$.

定义 1 称类 $\alpha_k(\mathrm{mod}2)$ 为纤维丛 $E\to B$ 的斯蒂弗尔 - 惠特尼 (Sfiefel-Whitney) 类, 并记为

$$W_q=\alpha_{n-q+1}(\mathrm{mod}2)\in H^q(B,\mathbb{Z}_2),q=1,\cdots,n.$$

我们定义 $W_0=1$, 并构建一个 "斯蒂弗尔 - 惠特尼多项式"

$$W(t)=1+W_1t+\cdots+W_qt^q+\cdots,$$

其中 t 为形式变量. 称光滑流形 M^n 的切丛的这个类为 M^n 的斯蒂弗尔 - 惠特尼类.

习题 11 证明等式 $W_1=0$ 的充分必要条件是流形 M^n 可定向. 证明 W_n 为欧拉示性类 (mod2).

习题 12 证明对于流形的直积 (或纤维丛的直积) 满足等式

$$W(t)=\overline{W}(t)\overline{\overline{W}}(t)$$

注: 是在上同调环 $H^*(\cdot,\mathbb{Z}_2)$ 中的乘积, $\overline{W},\overline{\overline{W}}$ 分别是因子流形的斯蒂弗尔 - 惠特尼多项式.

习题 13 证明对于 $\mathbb{R}P^n$ 上的标准一维非平凡纤维丛 η ("默比乌斯带" 参见 [1], 卷 II, §24) 成立

$$W(t)=1+W_1t,\quad W_1\in H^1(\mathbb{R}P^n,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2,\quad W_1\neq 0.$$

计算 $\mathbb{R}P^n$ 上切丛 τ 的斯蒂弗尔 - 惠特尼多项式. 可利用下面的结果: $\tau\oplus 1=\eta\oplus\cdots\oplus\eta$ (参看 [1], 卷 II, §24 的习题 1).

习题 14 考虑流形 M^n 上的 k 个向量场 $\eta_1,\cdots,\eta_k$ (处于一般位置). 流形上那些使这些向量场在此相关的点构成了"奇点闭链". 证明这是群 $H_{k-1}(M^n,\mathbb{Z}_2)$ 中的闭链 (mod2), 它是斯蒂弗尔 - 惠特尼类 W_{n-k+1} 的庞加莱对偶.

例 3 考虑复纤维丛 $E\xrightarrow{p}B$, 纤维为 $\mathbb{C}^n$, 结构群为 $G=U(n)$, 相伴的酉 (复)k 标架丛为 $E_k\xrightarrow{p}B$, 其纤维为 $F_k=V^{\mathbb{C}}_{n,k}$. 我们已知其同伦群为 (参看 [1], 卷 II, §24):

$$\pi_i(V^{\mathbb{C}}_{n,k})=0,\quad i\leqslant 2(n-k);\quad \pi_{2(n-k)+1}(V^{\mathbb{C}}_{n,k})=\mathbb{Z}.$$

构造纤维丛 $E_k\xrightarrow{p}B$ 的第一障碍是整系数上同调群中的元素

$$c_{n-k+1}\in H^{2n-2k+2}(B,\pi_{2n-2k+1}(V^{\mathbb{C}}_{n,k}))=H^{2n-2k+2}(B,\mathbb{Z}).$$

定义 2 称类 $c_q(q=1,\cdots)$ 为纤维丛 $E \xrightarrow{p} B$ 的"陈类". 如果 $B = M^{2n}$ 为复流形, 则称其切丛的陈类为这个流形的陈类. 引入"总陈类"为

$$c(t) = 1 + c_1 t + \cdots + c_q t^q + \cdots,$$

其中 t 为形式变元.

习题 15 证明对于纤维丛的乘积 (或流形的乘积) 成立公式

$$c(t) = \bar{c}(t)\bar{\bar{c}}(t),$$

其中 $\bar{c}, \bar{\bar{c}}$ 各为乘积因子的陈多项式.

习题 16 证明对于 $\mathbb{C}P^n$ 上的标准 U_1- 丛 η 成立

$$c(t) = 1 + c_1 t,$$

其中 $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ 为基元.

求 $\mathbb{C}P^n$ 的切丛 τ 的总陈类, 为此可利用等式 $\tau \oplus 1 = \eta \oplus \cdots \oplus \eta$ (参看 [1], 卷 II, §24).

习题 17 证明, 对复流形 M^{2n}, 陈类 c_n 与欧拉示性类等同. 求黎曼面的总陈类.

习题 18 证明 $U(n)$ 丛的结构群可约化为 $SU(n)$ 当且仅当 $c_1 = 0$

习题 19 对于 B 为底的复丛 ξ 的共轭丛 $\bar{\xi}$ (参看 [1], 卷 II, §24), 证明等式

$$c(t, \bar{\xi}) = c(-t, \xi),$$

或者

$$c_{2i}(\xi) = c_{2i}(\bar{\xi}),$$
$$c_{2i+1}(\xi) = -c_{2i+1}(\bar{\xi}).$$

习题 20 证明, 在把陈类 c_p 看成是群 $H^{2q}(B;\mathbb{R})$ 中的元时, 它等同于用纤维丛的联络所定义的陈类 (参看 [1], 卷 II, §25). 对于 c_1 类的验证特别简单. 因此在任意纤维丛中, 早先所定义的作为曲率张量 (在法化之后) 表达式的类在闭链上的积分总为整数.

习题 21 证明, 复纤维丛 ξ 的陈多项式 (mod2) 定义了作为把这同一个丛看成是实的时的斯蒂弗尔 – 惠特尼多项式, 就是说, 这个实的丛为 $r\xi$, 其中 r 为"实化"算子 (参看 [1], 卷 II, §24).

例 4 考虑实的 $O(n)$- 丛 η. 可以复化这个丛 (参看 [1], 卷 II, §24):

$$\eta \to c\eta = \xi.$$

从 $\xi = c\eta$ 具有结构群 $G = U(n)$, 并且是 "自共轭的". 它的意思是说 ξ 与 $\bar{\xi}$ 同构: $\xi \approx \bar{\xi}$ (请验证!).

定义 3 称复丛 $\xi = c\eta$ 的陈类 $(-1)^i c_{2i}$ 为实丛 η 的**庞特里亚金示性类**, 记为 $p_i(\eta) \in H^{4i}(B, \mathbb{Z})$.

由同构 $\xi \approx \bar{\xi}$ 得到

$$c_{2i}(\bar{\xi}) = c_{2i}(\xi) = p_i(\eta),$$
$$c_{2i+1}(\bar{\xi}) = -c_{2i+1}(\xi).$$

因而 $2c_{2i+1} = 0$. 故而在实的情形并不需考虑类 c_{2i+1}.

习题 22 计算类 $p_i(\mathbb{C}P^n)$.

习题 23 对于在 $\mathbb{C}P^n$ 中由一个 n 次方程 (在有限部分 $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}P^3$) 给出的非异流形 $M^4_{(n)}$, 求其类 $p_1(M^4_{(n)})$.

习题 24 证明类 p_i 与通过丛中联络定义的类 (参看 [1], 卷 II, §25) 相同.

习题 25 证明, 如果定向流形 M^4 为另一个定向流形的边缘, 即 $M^4 = \partial W^5$, 则 $p_1(M^4) = 0$, 更一般地, $M^n = \partial W^{n+1}$, 则类 W_q 和 p_s 的任意多项式在维数等于 n 时为零 (对于非定向情形, 只是 W_q 的多项式). 试用 W_q 来表达类 $p_s \mathrm{mod} 2$.

§10. 同调论及同伦群的计算方法. 嘉当 – 塞尔定理. 上同调运算. 向量丛

I. 上同调运算的概念. 例子

流形和有限复形的同伦群计算问题极其困难. 对于非单连通的复形, 其群 π_1 作用于每个 π_i 的情形, 这个问题有很强的数理逻辑上的理由表明它在算法上是不可解决的. 甚至对最简单也是最重要的单连通复形 (譬如球面), 同伦群的具体计算也还是极困难的没有解决的问题. 直接的几何方法可以获得一些个别的关于同伦群的结果 (参见 [1], 卷 II), 这是些特殊的情形. 我们前面也讲过一种统一的计算同伦群的方法, 它成功地建立在纤维空间的同调理论与同伦理论的基础之上. 在这里我们将讲述一个获取同伦群的无穷部分 $\pi_i(K) \otimes \mathbb{Q}$ 信息的方法, 这里的 $\mathbb{Q}$ 是有理数域, K 为单连通复形, 我们已在 §8 的习题中对此作了

部分讨论. 我们注意到, 同伦群 $\pi_i(K)$ 有限部分 (挠子群) 的计算需要发展出极其复杂的方法才行; 我们在后面就会明白这点. 除了已经讲过的同调论外, 所依赖的所有计算同伦群的代数方法建立在所谓的 "上同调运算" 的基础之上, 即具有如下性质的映射 $\theta : H^q(K,L;G_1) \to H^p(K,L;G_2)$ 的运算:

a) 映射 θ 对所有复形 K,L 有定义, 并为同伦不变;

b) 映射 θ 是 "自然的"(换另一个词就是 "函子式的" 或 "相容的"): 这意味着, 它与连续映射 $f : (K,L) \to (K',L')$ 交换:

$$\theta f^* = f^* \theta.$$

例 1 $\theta(x) = x^m$, 其中 $x \in H^q(K,L;G_1)$. 这里的 $p = mq$. 对于 $G_2 = G_1 = \mathbb{Z}_p$, 其中 $p = m$ 为素数; 我们有 $\theta(x+y) = x^p + y^p, \theta(\lambda x) = \lambda\theta(x)$, 这是因为 $\lambda^p = \lambda$. 这时 θ 为线性映射. 对于有理数域 $\mathbb{Q} = G_1 = G_2$, 映射 θ 不是个同态.

例 2 $\theta(x) = \delta_*(x), x \in H^q(K,L;\mathbb{Z}_p), \delta_*(x) \in H^{q+1}(K,L;\mathbb{Z}_p)$.

同态 δ_* 的定义在 §3 中已经给过: 如果元 x 由整系数上链 $\bar{x} \in C^q(K,L;\mathbb{Z})$ 代表, $x = \bar{x} \bmod p$, 于是 $\delta_* x = \left(\dfrac{1}{p}\delta\bar{x}\right) \bmod p$. 有同态 $\delta_1 = \delta_*$ 的自然推广 $\delta_2, \delta_3, \cdots, \delta_k$; 如果 $x \in \mathrm{Ker}\delta_*$, 即 $\left(\dfrac{1}{p}\delta\bar{x}\right) \bmod p$ 上同调于零, 于是 $\dfrac{1}{p}\delta\bar{x} = py + \delta z$. 所以定义了关系

$$y \bmod p = \delta_2(\bar{x}) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}\delta\bar{x} - \delta z\right).$$

习题 1 验证 δ_2 是个有明确定义的同态

$$H^q(K,L;\mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{Ker}\delta_1 \xrightarrow{\delta_2} H^{q+1}(K,L;\mathbb{Z}_p)/\mathrm{Im}\delta_1,$$

它与连续映射可交换, 即 $f^*\delta_2 = \delta_2 f^*$. 类似地构造 "更高的同态":

$$\delta_k : \bigcap_{i<k} \mathrm{Ker}\delta_i \to H^{q+1} / \bigcup_{i<k} \mathrm{Im}\delta_i.$$

当 $k \geqslant 2$ 时, 这些同态并不是处处有定义和单值的. 所以才称它们为 "更高的" 或 "部分的" 上同调运算. 同态 δ_k 的意义是这样的: 如果我们已知 $H^*(K,L;\mathbb{Z}_p)$ 的结构和算子 δ_k 的作用, 我们便能构造一个整值的上同调群 $H^*(K,L;\mathbb{Z})/\Gamma_p$, 其中 Γ_p 是其阶与 p 互素的元素构成的挠子群.

习题 2 所有 δ_k 在 $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$ 上的核是整数值群 $H^*(K;\mathbb{Z}) \bmod p$ 约化的结果.

习题 3 如果 $x = \delta_k y$ 且 $x \neq \delta_q z$, 其中 $q < k$, 则元素 x 由 p^k 阶生成元 $\tilde{x} \in H^*(K;\mathbb{Z})$ 代表.

因此, 对于所有 p, 算子 δ_k 在上同调 $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$ 中 (或者在同调 $H_*(K;\mathbb{Z}_p)$ 中, 它们对偶于上同调) 的知识让我们有可能建立整值同调和上同调群.

算子 δ_k 具有下列性质:

a) 它们对所有 q 在群 H^q 上 (或在它们的子群上) 有定义, 并为同态;

b) 它们与复形偶对正合序列的同态 δ 交换 (请验证!):

$$H^q(K,L;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(K,L;\mathbb{Z}_p),$$
$$\delta\delta_k = \delta_k\delta.$$

当 $k=1$ 时运算 $\delta_1=\delta_*$ 处处有定义并为单值.

定义 1 称满足上述性质 a) 和 b) 的运算 θ 为 "稳定的" 运算.

利用 "稳定" 运算使同伦群 $\pi_i(K)\otimes\mathbb{Q}$ 的计算容易进行的主要原因在于, 在有理上同调 $H^*(\ \ ;\mathbb{Q})$ 中没有非平凡的 (不能化为提升幂次的运算) 上同调运算 (将在后面证明). 在有理的 (实的, 复的) 上同调群上的维一上同调运算是乘以数 (标量) 的运算:

$$\theta(x)=\lambda x: H^q\to H^q.$$

算子 δ_* 的例子表明, 在上同调群 $H^*(\ \ ;\mathbb{Z}_p)$ 中存在非平凡的稳定上同调运算. 我们指出 (不予证明), 在上同调 mod$p$ 中存在许多非平凡的稳定运算 (参看 [45]).

定理 1 (斯廷罗德, (Steenrod)) 1) 设 $p=2$. 对每个整数 $i\geqslant 0$, 存在稳定上同调运算 θ, 记为 Sq^i, 它对所有 q 给出了同态

$$Sq^i: H^q(K,L;\mathbb{Z}_2)\to H^{q+i}(K,L;\mathbb{Z}_2).$$

运算 Sq^i 具有下面的性质:

a) $Sq^i(x)=0, 0<q<i$;

b) $Sq^0\equiv 1$;

c) $Sq^i(x)=x^2$, 对 $q=i$;

d) $Sq^i(xy)=\sum\limits_{j+k=i} Sq^j(x)Sq^k(y)$;

e) $Sq^1(x)=\delta_*x$.

2) 设 $p>2$. 对任意 $i\geqslant 0$ 定义稳定运算 St_p^i,

$$St_p^i: H^q(K,L;\mathbb{Z}_p)\to H^{q+2i(p-1)}(K,L;\mathbb{Z}_p),$$

使得

a) $St_p^i(x)=0, 0<q<2i$;

b) $St_p^0 \equiv 1$;

c) $St_p^i(x) = x^p, q = 2i$;

d) $St_p^i(xy) = \sum\limits_{k+j=i} St_p^j(x) St_p^k(y)$.

称运算 St_p^i 和 Sq^i 为**斯廷罗德运算**.

所有稳定运算可以通过斯廷罗德运算的乘积 (即复合) 来表达 (这是个复杂的定理). 在它们之间存在着非平凡的代数关系; 将来我们会明白看出, 所有这种结构建立起了一个复杂的程序, 以计算同伦群的有限子群. 我们注意到, 具有两个胞腔的复形结构是这种应用的简单的例示: 元素 $x \in \pi_{k+q}(S^q)$ 定义了一个两个胞腔的复形

$$K_x = D^{k+q+1} \bigcup_x S^q,$$

使得

$$H^q(K_x; G_1) = G_1, \quad H^{k+q+1}(K_x; G_2) = G_2$$

(分别由 z 和 w 生成). 对于 $q = n, k + q + 1 = 2n$ 的情形将在 §7 中讨论这样的复形.

引理 1 如果存在非平凡上同调运算 $\theta : H^q(\cdot; G_1) \to H^{q+k+1}(\cdot; G_2)$ 使得 $\theta(z) \neq 0$(z 为 G_1 的生成元, 见前面), 则前面给出的那个 $x \in \pi_{k+q}(S^q)$ 非零.

证明 反之, 设 $x = 0$, 则 K_x 的同伦型是球面束 $K_x \sim S^{q+k+1} \vee S^q$. 考虑映射 $K_x \xrightarrow{\pi} S^q$, 它在分项 S^q 上为恒同映射, 而把第二个分项 S^{q+k+1} 投射到一个点. 因为 $S^q \subset K_x$, 我们得到了投射 $K_x \xrightarrow{\pi} K_x$ 使得

$$\pi^* = 1 : H^q \to H^q,$$
$$\pi^* = 0 : H^{q+k+1} \to H^{q+k+1}.$$

按上同调运算的定义我们有 $\theta(\pi^* z) = \pi^* \theta(z)$, 故而 $0 = \theta(\pi^* z) = \theta(z)$. 引理得证. □

平凡的例子: $k = 0, q = n, x$ 为乘以 $2^s \in \mathbb{Z} = \pi_n(S^n), \theta = \delta_s : H^n(K; \mathbb{Z}_2) \to H^{n+1}(K; \mathbb{Z}_2)$.

II. 艾伦贝格 – 麦克莱恩复形及运算

在 §9 中我们已经考虑过 "艾伦贝格 – 麦克莱恩 (Eilenberg – Maclane) 复形" $K(D, n) = K$, 它有

$$\pi_n(K) = D, \ \pi_j(K) = 0, \ j \neq n.$$

我们假定有了下面事实, 即对任意 (D, n) 存在这样的复形 (参看 [45]), 并且它是个胞腔复形或同伦等价于胞腔复形.

下面的关系是显见的:

$$K(D_1 \times D_2, n) = K(D_1, n) \times K(D_2, n),$$
$$\Omega(K(D, n)) = K(D, n-1).$$

利用等式 $\pi_j(\Omega(X)) = \pi_{j+1}(X)$ (参看 [1], 卷 II, §24) 便可相信这个结论.

有下面的定理.

定理 2 对于任意胞腔复形 X, 映射 $f: X \to K(D, n)$ 的同伦类由上同调群 $H^n(X; D)$ 中某个元 x 完全确定; 又成立典则的同构 $[X; K(D, n)] \approx H^n(X, D)$.

证明 a) 设给出了上链 $\bar{x} \in C^n(X; D)$. 给出骨架 X^{n-1} 到一个点的映射. 在骨架 X^n 上的映射如此定义: 我们让每个 $\sigma^n \subset X^n$ 对应于元 $\bar{x}(\sigma^n) \in \pi_n(K(D, n)) = D$. 边缘 $\partial\sigma^n$ 已经映到了一个点. 那么我们便收胞腔上的映射 $\sigma^n \to K(D, n)$ 对应于 $\pi_n(K(D, n))$ 中的元素 $\bar{x}(\sigma^n)$. 我们再延拓这个映射到骨架 X^{n+1}. 存在这个延拓当且仅当 $\delta\bar{x} = 0$ (参看 §9). 进一步, 我们归纳假定在骨架 X^{n+1+i} 已经构造好了映射 $f: X^{n+1+i} \to K(D, n)$. 因为当 $j \neq n$ 时 $\pi_j(K(D, n)) = 0$, 故而延拓映射 f 的障碍等于零, 从而我们可以骨架延拓到整个 X.

b) 设给出了两个映射 $f: X \to K, g: X \to K$, 分别由两个上同调等价的上链 $\bar{x}, \bar{\bar{x}}$ 诱导, $\bar{x} - \bar{\bar{x}} = \delta y$; 可按 §9 那样在 $n-1$ 维骨架改变 f, 使得 $\bar{x}$ 变成 $\bar{x} - \delta y$. 于是在改变之后得到了 $\bar{x} \equiv \bar{\bar{x}}$. 由于当 $j > n$ 时所有群 $\pi_j(K)$ 等于零, 得出这两个映射同伦.(另一方向的证明作为习题留给读者.) 定理得证. □

定理 3 所有上同调运算 $\theta: H^n(M, L; D) \to H^p(M, L; G)$ 的集合自然地一一对应于群 $H^p(K; G) = H^p(K(D, n); G)$ 中的元素.

证明 我们考虑 $H^n(K(D, n); D)$ 中的 "典则" 元 u, 它按下面的方式定义. 由胡列维茨 (Hurwicz) 定理, 我们有 $H_n(K(D, n); \mathbb{Z}) = \pi_n = D$. 进而 $H^n(K; G_1) = \mathrm{Hom}(D, G_1)$, 其中 $\mathrm{Hom}(D, G_1)$ 为阿贝尔群 D 到 G_1 的所有同态. 如果 $D = G_1$, 则在集合 $\mathrm{Hom}(D, D)$ 中存在 "单位" 元 $u \in \mathrm{Hom}(D, D)$, 即恒同同态. 由定理 2 的证明知道, 对应关系 $H^n(X, D) \approx [X, K]$ 是这样建立的: 如果给出了映射 f, 则

$$[f] \longleftrightarrow f^*(u) \in H^n(X; D).$$

反之, 如果给出了上同调运算 θ, 则定义了元素 $\theta(u) \in H^p(K; G)$. 我们于是有了 $\theta \to \theta(u)$. 设给出了元素 $\theta(u) \in H^p(K; G)$ 和任意一个复形 X. 我们固定

一个元素 $x \in H^n(X, D)$. 由定理 2, 它定义了映射 $f: X \to K$, 满足 $f^*u = x$. 令 $\theta(x) = \theta(f^*u) = f^*\theta(u)$. 定理 3 得证. □

定理 4 对于任意有限生成阿贝尔群 D, 上同调环 $H^*(K(D, n); \mathbb{Q})$ 是自由反称代数, 它由线性空间 $D^* = \mathrm{Hom}(D, \mathbb{Q}) = H^n(K; \mathbb{Q})$ 中的元素生成.

证明 设群 D 循环群的直和 $D = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots$. 对于 $D = \mathbb{Z}_m$, 我们来证明, 当 $q > 0$ 时 $H^q(K(D, n); \mathbb{Q}) = 0$. 对于 $K = K(D; 1)$ 的情形, 这个结果已在 §9 建立过, 这是因为

$$K(D; 1) = S^\infty / \mathbb{Z}_m = \lim_{N \to \infty} L_m^{2N-1}(1, \cdots, 1).$$

我们归纳假定这个断言对于 $p < n$ 时正确. 考虑塞尔纤维丛:

$$E \to K(D, n), 纤维 F = K(D, n-1),$$

$\pi_j(E) = 0, j > 0$. 由上同调 $H^*(\quad; \mathbb{Q})$ 的谱序列, 我们得到当 $p > 0$ 时有 $E_2^{q,p} = 0$ 而 $E_2^{q,0} = H^q(B; \mathbb{Q})$. 所以 $r \geqslant 2$ 时 $d_r \equiv 0$, 从而 $E_\infty^{q,0} = E_2^{q,0} = H^q(E; \mathbb{Q}) = 0$. 因此 $E_2^{q,0} = H^q(B) = H^q(K(D, n)) = 0$. 对于 $D = \mathbb{Z}_m$, 从而对 $D = \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$, 我们有 $H^q(K(D, n); \mathbb{Q}) = 0, q > 0$ 为任意.

设 $D = \mathbb{Z}$. 考虑这个塞尔纤维丛, 并归纳假定定理对所有 $p < n$ 成立. 有两种情形:

a) n 为偶数: $H^*(K(D, n-1); \mathbb{Q}) = \wedge[u_{n-1}]$;

b) n 为奇数: $H^*(K(D, n-1); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[u_{n-1}]$.

于是由条件 $H^q(E; \mathbb{Q}) = 0, q > 0$, 我们得到由下面分别表示的两个谱序列:

a)

$n-1$	u	0	uv	0	uv^2
		0		0	
0	1	0	v	0	v^2
	0		n		

$d_i = 0, i \geqslant 2, i \neq n$;
$d_n(u) = v$;
$d_n(v) = 0$;

b)

$2n-2$	u^2		u^2v
		0	
$n-1$	u		uv
0	1		v

$d_i = 0, i \geqslant 2, i \neq n$;
$d_n(u) = v$;
$d_n(v) = 0$.

在这里我们实质地利用了谱序列中的上同调积. 因为对所有 p, q 我们在上述两种情形中都有 $E_{n+1}^{p,q} = 0$, 那么我们所要的结果几乎就是显然的了.

因为 $D = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$, 定理 4 得证. □

III. 同伦群 $\pi_i \otimes \mathbb{Q}$ 的计算

定理 5 (嘉当 – 塞尔) 设 X 为单连通空间 (或 "同伦单纯" 的), 其在 $\mathbb{Q}$ 中的直到 k 维的上同调是个同构于由自由反交换代数的环, 它由 $x_j \in H^{\alpha_j}(X;\mathbb{Q})$, $\alpha_j < k$ 的元自由生成. 于是成立下列论断:

a) 对于所有 $i < k-1$, 胡列维茨同态

$$H : \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \to H_i(X;\mathbb{Q})$$

的核为零;

b) 像 $H(\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q})$ 与 $H^*(X,\mathbb{Q})$ 中的元 x 的内积均为零, 这里的 x 可非平凡地分解为 $x = yz, \deg y > 0, \deg z > 0$;

c) 群 $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}, i < k-1$ 同构 (对偶) 于商群 $H^i(X;\mathbb{Q})/\Gamma$, 其中的 Γ 由所有那些有非平凡积分解的元素组成.

证明 由定理 4 知, 这些论断对于复形 $K(D,n)$, 因而对任意的直积 (包括 $k = \infty$) 也对:

$$K = K(D_1,\alpha_1) \times K(D_2,\alpha_2) \times K(D_3,\alpha_3) \times \cdots ,$$
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots . \qquad (*)$$

给出映射 $f : X \to K$, 其中 K 为形如 $(*)$ 的空间, 而自由阿贝尔群 D_j 的秩等于在维数 α_j 时的自由生成元 x_j 的个数. 由定理 2, 我们可选取映射 f 使得 $f^* : H^*(K;\mathbb{Q}) \to H^*(X;\mathbb{Q})$ 对直到维数 k 前都是同构. 根据 §8 指出的那个过程, 我们把映射 f 化成了在丛上的映射 $f : \widetilde{X} \to K$, 纤维为 $F, \widetilde{X}$ 同伦等价于 X.

因为 f^* 在小于 k 的维数处为同构, 于是由这个纤维丛的谱序列立即可得到, 在小于 $k-1$ 的维数有 $H^*(F,\mathbb{Q}) = 0$. 对于单连通的 X, 不妨认为群 D_1 不是自由阿贝尔的, 而是恰好等于复形 X 的第一个非零的上同调群. 因此 f_* 是群 $\pi_2(X) \to \pi_2(K)$ 的同构. 于是从纤维的同伦正合序列得到了 $\pi_1(F) = 0$ (参看 [1], 卷 II, §22).

引理 如果上同调 $H^q(F;\mathbb{Q})$ 在 $q < k-1$ 为零, 其中 F 为单连通空间, 则对 $i < k-1$ 有 $\pi_i(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$.

引理的证明 由胡列维茨定理, 第一个非平凡群 $\pi_{\alpha_2}(F)$ 为有限群. 考虑纤维丛映射 $f : F \to K(\pi_{\alpha_2}(F), 2)$, 其纤维为 F_3. 因为 $H^*(K(\pi_{\alpha_2}(F),2);\mathbb{Q}) = 0$, 由谱序列我们看出 $H^*(F_3;\mathbb{Q}) = H^*(F;\mathbb{Q})$. 于是空间 F_3 便有为零的群 $\pi_{\alpha_2}(F_3) = 0, \pi_j(F_3) = 0, j \leqslant \alpha_2$. 由归纳可化此引理到胡列维茨定理, 因而引理得证. □

嘉当 – 塞尔定理的证明 从引理得到 $\pi_i(F)\otimes\mathbb{Q}=0$ 对所有 $i<k-1$ 成立. 于是群同构 $\pi_i(X)\otimes\mathbb{Q}\approx\pi_i(K)\otimes\mathbb{Q}$ 便由纤维丛的同伦群正合序列得到. 证完. □

推论 1 对任意李群 G, 同伦群 $\pi_i(G)\otimes\mathbb{Q}$ 只在奇数 $i=2q-1$ 时非零, 并且一一对应于自由生成环 $H^*(G;\mathbb{Q})=\wedge[x_{i_1},\cdots,x_{i_k}]$.

推论 2 对于球面 S^n, 我们有

$$\begin{aligned} n=2k\text{时}:\ &\pi_n(S^n)\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q},\pi_{2n-1}(S^n)\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q},\\ &\pi_j(S^n)\otimes\mathbb{Q}=0,j\neq n,2n-1;\\ n=2k+1\text{时}:\ &\pi_n(S^n)\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q},\\ &\pi_j(S^n)\otimes\mathbb{Q}=0,j\neq n. \end{aligned}$$

证明 由下面的事实 (参看 §7) 推出了引理 2:

$$H^*(\Omega(S^n);\mathbb{Q})=\begin{cases}\mathbb{Q}[x_{n-1}], & \text{当 } n=2k+1,\\ \wedge[x_{n-1}]\otimes\mathbb{Q}[x_{2n-2}], & \text{当 } n=2k.\end{cases}$$ □

推论 3 如果 X 为 $(n-1)$– 速通复形 (即 $\pi_j(X)=0,j<n$), 则对所有群 $\pi_q(X),q<2n-1$ 我们有同构

$$H:\pi_q(X)\otimes\mathbb{Q}\to H_q(X)\otimes\mathbb{Q}.$$

证明 可归结为: 在 $(n-1)$– 速通时, 非平凡上同调乘积只能出现在 $2n$ 维情形. 因此在 $2n-1$ 维前环 $H^*(X,\mathbb{Q})$ 对于 $(n-1)$ – 连通复形总是自由的.

习题 4 计算球面束 $S^k\vee S^q$ 的同伦群 $\pi_i(S^k\vee S^q)\otimes\mathbb{Q}$.

在所有的情形中, 对于单连通复形的群 $\pi_i(X)\otimes\mathbb{Q}$ 的计算都可化为有理上同调 $H^*(\Omega(X);\mathbb{Q})$ 的计算, 其原因在于这个环是自由反交换代数 (参看 §7).

推论 4 如果 X 在维数小于 N 处具有 H 空间的同伦型, 则 $H^*(X,\mathbb{Q})$ 在小于维数 $N-1$ 处为自由代数, 并且成立同构

$$\left(\sum_{i\leqslant N-2}\pi_i(X)\otimes\mathbb{Q}\right)^*\cong\sum_{i\leqslant N-2}H^i(X;\mathbb{Q})/\Gamma,$$

其中的 Γ 为所有有非平凡乘积表达式的元素组成, 而 $(M)^*$ 表示 M 的对偶空间.

Ⅳ. 对向量丛的应用. 示性类

考察自然映射 $G_{k,N} \times G_{l,M} \xrightarrow{\psi} G_{k+l,N+M}$, 它由线性空间的直和产生. 这里的 $G_{k,N}$ 为实, 复, 或者四元数的格拉斯曼流形. 在 $N \to \infty, M \to \infty$ 时, 我们得到映射

$$G_{k,\infty} \times G_{l,\infty} \xrightarrow{\psi} G_{k+l,\infty},$$

或者 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §24)

$$BG_k \times BG_l \xrightarrow{\psi} BG_{k+l},$$

其中的 BG_n 为群 G_n 的 (万有) 分类空间, G_n 是群 $O(n), SO(n), U(n), Sp(n)$ 中的一个. 现在留意一下, 按照 [1], 卷 Ⅱ, §24 的结果, 在包含关系 $O(n) \subset O(n+1), SO(n) \subset SO(n+1), U(n) \subset U(n+1), Sp(n) \subset Sp(n+1)$ 下, 同伦型是 "稳定的". 更准确地说, 对任意维数 $< N$ 的空间 X, 存在映射同伦类 $[X, BG]$ 间的同构

$$\begin{aligned}
&[X, G_{k,\infty}] = [X, G_{k+1,\infty}],\\
&\text{其中 } k = N, \text{ 对 } G = O(k), SO(k),\\
&\quad 2k = N, \text{ 对 } G = U(k), SU(k),\\
&\quad 4k = N, \text{ 对 } G = Sp(k).
\end{aligned}$$

我们还在 [1], 卷 Ⅱ, §24 知道, 对于 $[X, G]$ 这已经得到了证明. 因为 $\pi_i(G) = \pi_{i+1}(BG)$, 于是由等式 $\pi_i(G_1, G_2) = 0$, (其中 $G_2 \subset G_1$ 为群的包含关系) 推出了

$$\pi_{i+1}(BG_1, BG_2) = 0$$

对同一个 i 值成立. 所以对所给的偶对 (G_1, G_2), 包含关系 $BG_1 \to BG_2$ 具稳定的同伦型.

可以引进 "极限" $G_\infty = O, SO, U, SU, Sp$ 如下:

$$\begin{aligned}
O &= \lim_{N\to\infty} O(1) \subset O(2) \subset \cdots \subset O(N) \subset \cdots,\\
SO &= \lim_{N\to\infty} SO(1) \subset SO(2) \subset \cdots \subset SO(N) \subset \cdots,\\
U &= \lim_{N\to\infty} U(1) \subset U(2) \subset \cdots \subset U(N) \subset \cdots,\\
SU &= \lim_{N\to\infty} SU(1) \subset SU(2) \subset \cdots \subset SU(N) \subset \cdots,\\
Sp &= \lim_{N\to\infty} Sp(1) \subset Sp(2) \subset \cdots \subset Sp(N) \subset \cdots.
\end{aligned}$$

对于群 G_∞, 万有空间 BG_∞ 已经是个 H 空间了:

$$
\begin{aligned}
&G_\infty \times G_\infty \to G_\infty \ (\text{直和}),\\
&BO \times BO \xrightarrow{\psi} BO,\\
&BSO \times BSO \xrightarrow{\psi} BSO,\\
&BU \times BU \xrightarrow{\psi} BU,\\
&BSU \times BSU \xrightarrow{\psi} BSU,\\
&BSp \times BSp \xrightarrow{\psi} BSp,
\end{aligned}
$$

其中 H 空间的单位元 $x_0 \in BG_\infty$ 可以取做任意一个固定点 (请验证!). 也可换一种说法: $BO(n)$ 直到 $N=n$ 之前都具有 H 空间的同伦型, $BSO(n)$ 直到 $N=n$ 前, $BU(n)$ 和 $BSU(n)$ 直到维数 $N=2n$ 之前, 而 $BSp(n)$ 则直到 $N=4n$ 之前都具有 H 空间的同伦型. 在后文 (参看 §25) 中将证明 $BU \cong \Omega(U), BSp \cong \Omega(\Omega(\Omega(SO))), BSO \cong \Omega(\Omega(\Omega(Sp)))$.

我们在 §7 中已经知道了对 $G=SO,U,SU,Sp$ 的环 $H^*(G;\mathbb{Q})$. 因而, 由嘉当 - 塞尔定理, 我们便知道了 $\pi_i(G)\otimes\mathbb{Q}$ (参看前面的推论 1). 从而也就知道了 $\pi_{i+1}(BG)\otimes\mathbb{Q}\approx\pi_i(G)\otimes\mathbb{Q}$. 那么对偶空间 $(\pi_j(BG)\otimes\mathbb{Q})^*$ (到维数 N 之前) 的基等同于环 $H^*(BG,\mathbb{Q})$(直到维数 N 前) 的乘法基 (参看前面的结果), 这是因为 BG 在这些维数具有 H 空间的同伦型.

然而, 由所有维数构成的环 $H^*(BG,\mathbb{Q})$ 是自由反交换代数, 甚至在 BG 不是 H 空间时也是如此. 这由下面的习题 (博雷尔 (Borel)) 得出:

• **习题 5** 设 $E\to B$ 为塞尔纤维丛, 纤维 $F=\Omega(B)$, 其中 B 为单连通, E 可缩. 如果 $H^*(F;\mathbb{Q})$ 是个外代数, 则 $H^*(B;\mathbb{Q})$ 为多项式代数. 对于 $H^*(F;\mathbb{Q})=\wedge[x]$ 的情形, 这个定理已在前面证明了. 先从 $H^*(F;\mathbb{Q})=\wedge[x_1,x_2]$ 证明这个结论, 然后再对 $\wedge[x_1,x_2,x_3]$, 等等.

对于群 G, 我们有

$$
\begin{aligned}
&H^*(BSO(2k);\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[p_1,\cdots,p_{k-1},\chi], \deg p_i=4i, \deg\chi=2k, p_k=\chi^2;\\
&H^*(BSO(2k+1);\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[p_1,\cdots,p_k], \deg p_i=4i;\\
&H^*(BU(k);\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[c_1,\cdots,c_k], \deg c_i=2i;\\
&H^*(BSU(k);\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[c_2,\cdots,c_k], \deg c_i=2i;\\
&H^*(BSp(k);\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[\gamma_1,\cdots,\gamma_k], \deg\gamma_i=4i.
\end{aligned}
$$

由陈示性类 c_i 的显式构造 (以及由它们得到的所有其他类的显式构造, 见 §9), 我们知道类 c_i,χ,p_i,γ_i 是取整数值的, 即属于 $H^*(BG;\mathbb{Z})\to H^*(BG;\mathbb{Q})$ 的像.

按照与嘉当子群 (极大交换子群) 有关的李群所常用上同调技术的类比, 我们也考虑极大环面 $T^n \overset{i}{\subset} G$ 的情形:

$$
\begin{aligned}
&T^k \overset{i}{\subset} SO(2k),\\
&T^k \overset{i}{\subset} SO(2k+1),\\
&T^k \overset{i}{\subset} U(k),\\
&T^{k-i} \overset{i}{\subset} SU(k),\\
&T^k \overset{i}{\subset} Sp(k).
\end{aligned}
$$

对于 $G_n = T^n$, 我们有 (参看 §7):

$$
\begin{aligned}
&BG_n = BT^n = \mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty, \text{ 从而}\\
&H^*(BT^n;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_1,\cdots,t_n], t_i \in H^2(BT^n;\mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

习题 6 证明映射

$$
H^*(BG;\mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^*(BT^n;\mathbb{Q})
$$

的核为零 (即单射), 并且 $\mathrm{Im} i^*$ 正好由那些在外尔 (Wegl) 群下不变的多项式构成.

提示. 对于 $U(n)$, 其外尔群由所有生成元 t_i 的置换群组成. 对 $SO(2n)$, 外尔群还包含了偶对之间的反射 $(t_i, t_j) \mapsto (-t_i, -t_j)$. 对 $SO(2n+1)$, 外尔群也包含了所有反射 $t_i \mapsto -t_i$. 对 $Sp(n)$, 外尔群与 $SO(2n+1)$ 的一样.

因此, 像 $\mathrm{Im} i^*(H^*(BG;\mathbb{Q})) \subset H^*(BT^n;\mathbb{Q})$ 有形式:

a) $SO(2k), i^*(p_q) = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_q} t_{i_1}^2 \cdots t_{i_q}^2, i^*(\chi_k) = t_1 \cdots t_k$;

b) $SO(2k+1), i^*(p_q) = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_q} t_{i_1}^2 \cdots t_{i_q}^2$;

c) $U(k), i^*(c_j) = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_j} t_{i_1} \cdots t_{i_j}, c_k = \chi$;

d) $Sp(k), i^*(\gamma_j) = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_j} t_{i_1}^2 \cdots t_{i_j}^2$.

(请将这些公式与 [1], 卷 Ⅱ, §25 的公式比较, 在那里选取了 "牛顿多项式" 为基: $\sum t_i^m = \tilde{c}_m$.)

习题 7 推导类 c_i 与 $\tilde{c}_m$ 之间的关联公式. 求对实化的 $U-$ 纤维丛 ξ, 通过由类 $c_q(\xi)$ 表示的类 $p_j(\gamma\xi)$ 的公式.

习题 8 以适当选取的纤维丛的谱序列推导出关于上同调的 $H^*(BG;\mathbb{Q})$ 的约化公式 (见前面)

习题 9 证明对于维数 $< N$ 的复形 X, 映射同伦类 $[X, BG_n]$ (或者说是以 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$ (四元数域) 为纤维的 "稳定" 向量丛的等价类) 构成了阿贝尔群, 这是因为 BG 是 $H-$ 空间 (对 $O, SO, N = n$; 对 $U, SU, N = 2n$; 对 $Sp, N = 4n$). 映射 $X \to BG$ 的加法由 BG 中的乘法 ψ (或丛的直和) 得到 (见前面所定义的 ψ).

证明环同构

$$[X, BG_n] \otimes \mathbb{Q} \approx \mathrm{Hom}(H^*(BG_n; \mathbb{Q}), H^*(X; \mathbb{Q})),$$

或者等价地, 在差一个群 $[X, BG_n]$ 中元的幂次上向量丛被示性类完全确定.

对角块的包含关系

$$U(m) \times U(n) \subset U(n+m)$$

定义了向量丛的直和 (对于群 O, SO, SU, Sp 也是类似的). 于是极大环面可直接互乘: $U(m)$ 的生成元组 $t'_1, \cdots, t'_m \in H^2(BT^m; \mathbb{Q})$ 与 $U(n)$ 的生成元组 $t''_1, \cdots, t''_n \in H^2(BT^n; \mathbb{Q})$ 组成了群 $U(m+n)$ 的生成元组 $t_1, \cdots, t_{m+n} \in H^2(BT^{m+n}; \mathbb{Q})$. 这里的 $t_i = t'_i$, 当 $1 \leqslant i \leqslant m, t_{j+m} = t''_j$, 当 $1 \leqslant j \leqslant n$.

将 $c_i(t_1, \cdots, t_{n+m})$ 展成 $c_j(t'_1, \cdots, t'_m) = c'_j$ 和 $c''_q = c_q(t''_1, \cdots, t''_n)$ 的初等对称多项式, 我们便得到了在 §9 中所没有证明过的分解公式

$$c_i = \sum_{j+q=i} c'_j c''_q.$$

或者说, 对于 $c(z) = \sum c_i z^i, c'(z) = \sum c'_j z^j, c''(z) = \sum c''_q z^q, c_0 = 1$, 我们有

$$c(z) = c'(z)c''(z). \tag{1}$$

现在考虑 "陈特征标" $(G = U(n))$:

$$\mathrm{ch}\xi = \sum_{i=1}^{n} \exp(zt_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(zt_i)^m}{m!} \right).$$

对于 $\xi \oplus \eta$, 我们有

$$\mathrm{ch}(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}\xi + \mathrm{ch}\eta. \tag{2}$$

习题 10 不求助于极大环面中的生成元 t_i, 由 (1) 推出 (2), 并也由 (2) 推出 (1).

从 $\xi \otimes \eta$ 的张量积由乘积

$$U(m) \times U(n) \to U(mn)$$

定义 (对于 O, SO 可类比定义). 这时极大环面的关系更复杂一些: 存在环面间的映射

$$T^m \times T^n \xrightarrow{\varphi} T^{mn},$$
$$BT^m \times BT^n \xrightarrow{\varphi} BT^{mn}$$

使得

$$\varphi^*(t_{jk}) = t'_j + t''_k, \tag{3}$$

其中

$$t_{jk} \in H^2(BT^{mn}; \mathbb{Q}), t'_j \in H^2(BT^m; \mathbb{Q}), t''_k \in H^2(BT^n; \mathbb{Q}).$$

公式 (3) 立刻由对映射 φ 在对角型矩阵上的显式公式得到.(请验证!)

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\xi\mathrm{ch}\eta &= \left(\sum_{i=1}^{m}\exp(zt'_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\exp(zt''_j)\right)\\ &= \sum_{i,j}\exp[z(t'_i + t''_j)] = \varphi^*\left(\sum_{i,j}\exp(zt_{ij})\right),\end{aligned}$$

所以从公式 (3) 得到了

$$\mathrm{ch}(\xi \otimes \eta) = \mathrm{ch}\xi\mathrm{ch}\eta. \tag{4}$$

对于复射影空间 $\mathbb{C}P^n$, 我们有 (参看 [1], 卷 II, §24 中的习题)

$$\tau(\mathbb{C}P^n) \oplus 1 = \underbrace{\eta \oplus \cdots \oplus \eta}_{n+1\text{项}}, \tag{5}$$

其中 $c_1(\eta) = t \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}), \tau(\mathbb{C}P^n)$ 为切丛. 由公式 (5) 和 (1) 我们得出

$$\begin{aligned}c(z) &= (1+zt)^{n+1} = 1 + c_1 z + \cdots + c_n z^n,\\ p(z) &= (1 - z^2t^2)^{n+1} = 1 + p_1 z^2 + \cdots + p_k z^{2k} + \cdots.\end{aligned} \tag{6}$$

这里对向量丛 $\tau \oplus 1, t_1 = t_2 = \cdots = t_{n+1} = t$, 从而 $p_i(\tau) = (-1)^i c_{2i}(\tau \oplus \bar{\tau})$; 由定义类 $p_i(\gamma) = (-1)^i c_{2i}(c\gamma)$; 但对于 $\gamma = \gamma\xi$, 我们有 $c\gamma = c\gamma\xi = \xi \oplus \bar{\xi}$ (参看 [1], 卷 II, §24). 因为 $c_i(\bar{\xi}) = (-1)^i c_i(\xi)$, 于是我们得到

$$p_1(\eta) = -c_2(\eta \oplus \bar{\eta}) = t^2, p_i(\eta) = 0, i > 1.$$

由此得出

$$\begin{aligned}&p_i(\tau) = (-1)^i c_{2i}(\tau \oplus \bar{\tau}),\\ &\left(1 + \sum p_i(\tau) z^{2i}\right) = (1 - z^2t^2)^{n+1} = p(\mathbb{C}P^n).\end{aligned} \tag{7}$$

习题 11 求对称幂 $S^i\xi$ 和外幂 $\wedge^i\xi$ 的陈特征标, 其中 ξ 为 $U-$ 向量丛.

习题 12 求直积 $\mathbb{C}P^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}P^{n_s}$ 的陈类和陈特征标.

习题 13 设 X_k^{n-1} 是由 $\mathbb{C}P^n$ 中一个代数 k 次 (非异) 方程给出的流形, 研究类 c_1. 证明条件 $c_1(X_k^{n-1})=0$ 等价于 $k=n+1$.

习题 14 求欧拉示性数 $\chi(X_k^{n-1})$ 和数 $(c_1^{n-1},[X_k^{n-1}])$.

习题 15 研究 $k=4,k=3$ 的情形, 求 X_k^2 的同调群.

习题 16 证明在 $\mathbb{C}P^n$ 由非异方程给出的超曲面为单连通.

V. 低维的斯廷罗德运算的分类

我们想要给出计算球面的同伦群的方法, 这个方法所依据的事实是存在具有其公式化性质的谱序列 (参看勒雷定理), 斯廷罗德运算 Sq^i 和 St_p^i 的存在性和公式化的性质, 还有对于 $\pi=\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{p^n}$ 的艾伦伯格 - 麦克莱恩复形 $K(\pi,n)$ (对于所有有限生成的阿贝尔群也是一样的). 为此目的, 必须首先算出所有 mod$p$ 的上同调算子. 对任意阿贝尔群, 我们按照下面的模式构造复形 $K=K(\pi,n)$:

a) 存在一个胞腔 $\sigma^0\in K(\pi,n)$;

b) 当 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 时没有 i 维胞腔;

c) 胞腔 σ_j^n 与生成元 $x_j\in\pi$ 一一对应;

d) 按照群 π 的生成元 x_j 上的关系 γ_k 把胞腔 σ_k^{n+1} 附加在已经构造好的骨架 K^n 上:

$$K^{n+1}=\left(\bigcup_k\sigma_k^{n+1}\right)\bigcup_{\gamma_k}K^n,$$

$$\gamma_k=\left\{\sum_j\lambda_{jk}x_j=0,\lambda_{jk}\text{ 为整数}\right\},\gamma_k:\partial\sigma_k^{n+1}\to K^n.$$

对于骨架 K^{n+1}, 我们得出

$$\pi_j(K^{n+1})=0,j<n,$$
$$\pi_n(K^{n+1})=\pi.$$

选取任意一个基元 $\alpha_j\in\pi_{n+1}(K^{n+1})$ 并附加胞腔 (参看 §4)

$$\left(\bigcup_j\sigma_j^{n+2}\right)\bigcup_{\alpha_j}K^{n+1}=K^{n+2},$$
$$\alpha_j:\partial\sigma^{n+2}\to K^{n+1}.$$

于是我们得到骨架 K^{n+2}. 由广义的胞腔逼近定理 (见 §4) 我们有

$$\pi_j(K^{n+2}) = \pi_j(K^{n+1}), j \leqslant n,$$
$$0 = \pi_{n+1}(K^{n+2}) = \pi_{n+1}(K^{n+1})/(\alpha_1, \alpha_2, \cdots).$$

重复这个构造, 在过渡到 K^{n+3} 时我们便有了群 $\pi_{n+2}(K^{n+2})$, 然后, 过渡到 K^{n+4}, 又有了 $\pi_{n+3}(K^{n+3})$ 等等. 取极限 $n+q \to \infty$ 得到无限的胞腔复形 $K(\pi, n)$.

但是对我们而言 $K(\pi, n)$ 的构造本身并不重要, 重要的只是存在这样的复形. 我们已知下列一些关系成立:

a) $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty, H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[t], t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_p), p \geqslant 2$ 为所有素数.

b) $K(\mathbb{Z}_{p^h}, 1) = S^\infty/\mathbb{Z}_{p^h} = \lim\limits_{N\to\infty} L_{p^h}^{2N+1}(1, 1, \cdots, 1)$.

存在丛 (参看 §4)

$$p : L_{p^h}^{2N+1}(1, 1, \cdots, 1) \to \mathbb{C}P^N, \text{ 纤维为 } S^1, \tag{8}$$

它由广义霍普夫丛

$$S^{2N+1} \xrightarrow[p]{S'} \mathbb{C}P^N, \text{ 纤维 } S^1,$$

得出 (见 [1], 卷 II, §2), 它是球面 $S^{2N+1} = \{z_0, \cdots, z_N, \sum |z_j|^2 = 1\}$ 在群 $\mathbb{Z}_{p^h}$ 的作用: $(z_0, \cdots, z_N) \mapsto (\exp[2\pi i/p^h]z_0, \cdots, \exp[2\pi i/p^h]z_n)$ 下的商映射. 用系数在 $\mathbb{Z}$ 上的谱序列计算丛 (8) 的上同调, 我们得到

1	u	0	uv	0	uv^2	0
0	1	0	v	0	v^2	0
	0	1	2	3	4	$\cdots$

$$d_2 : u \to p^h v, v \to 0,$$
$$uv \to p^h v^2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$uv^k \to p^h v^{k+1}.$$

所以

$$H^{2q}(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{p^h}, \quad q = 1, 2, 3, \cdots;$$
$$H^{2q+1}(K; \mathbb{Z}) = 0, \quad q > 0.$$

在域 $\mathbb{Z}_p$ 上则成立

$$d_2 u = 0, \quad d_2 v = 0, \quad E_2^{p,q} = E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}.$$

于是有了环

$$H^*(K(\mathbb{Z}_{p^h}, 1); \mathbb{Z}_p) = \wedge[u] \otimes \mathbb{Z}_p[v],$$

其中, 因为并代数 E_∞^* 是自由的, 故 $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$ 为自由代数. 由对整值上同调的知识, 我们在 $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$ 中得到了

$$\delta_j(uv^k)=0,\quad j<h,\quad \delta_q(v^k)=0,\quad q \text{ 任意},$$
$$\delta_h u=v,\quad \delta_h(uv^k)=v^{k+1}.$$

我们还留意到, 如果 $\delta_h(u),\delta_h(v)$ 都有定义, 则

$$\delta_h(uv)=(\delta_h u)v\pm u(\delta_h v).$$

这个性质立刻由整系数上链的上边缘算子给出的 δ_h 的定义本身得到.

习题 17 利用前面得到的知识证明 $H^*(K(\mathbb{Z}_{p^h},n);\mathbb{Z}_q)\equiv 0$, 其中 p 与 q 互素.

对于以单连通空间为底的纤维丛, 其上同调的谱序列为

$$E_2^{q,0}=H^q(B),\quad E_2^{0,q}=H^q(F).$$

存在映射 $p:E\to B, i:F\to E$,

$$p^*:H^q(B)\to H^q(E,F) \text{ 为 “投射”},$$
$$i^*:H^q(E)\to H^q(F) \text{ 为 “限制”}.$$

我们可以定义一个多值映射, 即所谓的*超渡映射*

$$H^q(F)\supset A^q \xrightarrow{\tau=(p^*)^{-1}\delta} H^{q+1}(B),$$

其中 $\delta:H^q(F)\to H^{q+1}(E,F), A^q=\delta^{-1}(p^*H^{q+1}(B)\bigcap \mathrm{Im}\delta)$ 为多值映射 τ 的定义域, 它并不在 $H^q(F)$ 上处处有定义. 显然, $A^q\supset \mathrm{Im}i^*$ 并有 $\tau(\mathrm{Im}i^*)=0$. 用微分 d_r 给出的超渡的定义为

$$A^q=\bigcap_{r\leqslant q}\mathrm{Ker}d_r=E_{q+1}^{0,q}\subset H^q(F),$$
$$\text{在群 } A^q \text{ 上 } \tau=d_{q+1}.$$

因为所有运算 $Sq^i, St_p^i, \delta, \delta_h$ 都与连续映射的 p^* 可换: $p^*\theta=\theta p^*$ (这里的 θ 为前面提及的那些稳定上同调运算), 也与在 $\mathbb{Z}_p$ 上同调中的边缘 $\delta:H^q(F)\to H^{q+1}(E,F)$ 交换, 故而得到所有稳定运算 $\delta,\delta_h,Sq^i,St_p^i$ 都与超渡映射交换: $\tau\theta=\theta\tau$. 这表明, 对那些定义了超渡映射的元 $x\in A^q$ (或者就称其为 “超渡” 元), 其像 $\theta x\in A^{q+j}$ 也在超渡的定义域中 (即是个超渡元), 并且这时成立

$$\theta\tau=\tau\theta, \tag{9}$$
$$\theta=\delta,\delta_h,Sq^i,St_p^i.$$

我们现在来计算复形 $K(\mathbb{Z},n)$ 和 $K(\mathbb{Z}_{p^h},n)$ 的某些 "稳定" 上同调.

1. $K=K(\mathbb{Z},n), p=2$ 的情形.

对于 $n=1,2$ 答案已知: $H^*(K(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[u], \deg u=2$. 我们考虑从 $E\to K(\mathbb{Z},3), F=\Omega(B)=K(\mathbb{Z},2)$ 的谱序列. 对 $E_2^{p,q}$ 项我们有 $E_2^{0,q}=H^*(F;\mathbb{Z}_2)$. 显然, 元素 $u\in H^2(F;\mathbb{Z}_2)$ 是个超渡元, 从而 $\tau(u)=d_3(u)=v\in H^3(B;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$. 由 Sq^i 的性质 (见 §10 的 I 小节及超渡的性质) 知, 元素 $Sq^2(u)=u^2, Sq^4Sq^2(u)=(u^2)^2=u^4$ 为超渡, 从而

$$
\begin{aligned}
&\tau(u^4)=Sq^2(u)\in H^5(B;\mathbb{Z}_2),\\
&\tau(u^8)=Sq^4Sq^2(v)\in H^9(B;\mathbb{Z}_2),\\
&\cdots\cdots.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

由此立即得出, 代数 $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ 为生成元 $\tau(u^{2^i})$ 的多项式代数的形式:

$$
\begin{aligned}
&H^*(B;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[v,Sq^2v,Sq^4Sq^2v,\cdots],\\
&B_3=B=K(\mathbb{Z},3),\delta_h v=0,Sq^3v=v^2.
\end{aligned}
$$

现在转向下面的丛:

$$E\to B_m, F=K(\mathbb{Z},n-1), B_n=K(\mathbb{Z},n).$$

当转到 $F=K(\mathbb{Z},3), B=B_4=K(\mathbb{Z},4)$ 时, 我们得到了已经考虑过的 $E_2^{0,q}=H^q(F;\mathbb{Z}_2)$ 中的超渡元:

$$v,Sq^2v,\cdots,Sq^{2^i}Sq^{2^{i-1}}\cdots Sq^2v,$$

同时也由把它们提升 2^i 幂次得到新元: $v^2=Sq^3v, v^4=Sq^6Sq^3v,\cdots$. 重复这个过程, 我们得到对于 $q<n$ 前面的上同调群 $H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}_2)$ (表出生成元):

$q=0$	1	2	3	4
u	0	Sq^2u	Sq^3u	Sq^4u
$q=5$	6	7	8	9
Sq^5u	Sq^6u Sq^4Sq^2u	Sq^7u Sq^5Sq^2u	Sq^8u Sq^6Sq^2u	Sq^9u Sq^7Sq^2u Sq^6Sq^3u

2. $K=K(\mathbb{Z}_2,n)$ 的情形.

这里的讨论是完全类似的, 但是从纤维丛

$$E\to B=K(\mathbb{Z}_2,2),\quad F=K(\mathbb{Z}_2,1)=\mathbb{R}P^\infty$$

开始. 这里的超渡元为

$$u \in H^1(F;\mathbb{Z}_2),\ Sq^1u = \delta_* u = u^2, Sq^2Sq^1u = (u^2)^2, \cdots,$$
$$Sq^{2^i}Sq^{2^{i-1}}\cdots Sq^2Sq^1u = ((u^2)^2\cdots)^2.$$

进行类似讨论, 我们得到了 "稳定" 群 $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2,n);\mathbb{Z}_2)$ 在 $q<n$ 的表格:

$q=$	0	1	2	3	4	5	6
	u	Sq^1u	Sq^2u	Sq^3u	Sq^4u	Sq^5u	Sq^6u
				Sq^2Sq^1u	Sq^3Sq^1u	Sq^4Sq^1u	Sq^5Sq^1u
							Sq^4Sq^2u

注 在后面进一步的计算中, 我们只用到 $q<7$ 时的群 $H^{n+q}(K;\mathbb{Z}_2)$, 所以对我们来说, 所提及的论断的细节的证明并不重要: 在 $q<7$ 时所有这些论断可以由初等想法得到的谱序列进行验证 (参看前面的内容).

3. $K=K(\mathbb{Z}_{2^h},n), q<n$.

对于 $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_{2^h},n);\mathbb{Z}_2), q<n$, 我们有

$q=0$	1	2	3	4
u	$\delta_h u$	Sq^2u	Sq^3u	Sq^4u
			$Sq^2\delta_h u$	$Sq^3\delta_h u$

4. $K=K(\mathbb{Z}_{p^h},n)$ 的情形完全类似. 我们不再去考虑上同调 $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$ 了. 立刻可指出答案.

a) 对 $K=K(\mathbb{Z},n)$ 有 $H^{n+q}(K;\mathbb{Z}_p), q<n$,

$q=0$	1	2	$\cdots$	$2p-2$	$2p-1$
u	0	0	0	St_p^1u	$\delta_* St_p^1u$

b) 对 $K=K(\mathbb{Z}_{p^h},n)$ 有 $H^{n+q}(K;\mathbb{Z}_p), q<n$,

$q=0$	1	2	$\cdots$	$2p-2$	$2p-1$
u	$\delta_h u$	0	0	St_p^1u	$\delta_* St_p^1u$
					$St_p^1\delta_h u$

(对于 $h=1$ 有 $\delta_1=\delta_*$).

因此, 我们看到在指定的维数上, 所有 "稳定" 上同调运算 θ 被约化为平方迭代和幂 Sq^i, St_p^i, δ_* 的迭代, 其中

$$\theta: H^n(K,L;\mathbb{Z}_p)\to H^{n+q}(K,L;\mathbb{Z}_p),$$

并且与上同调的边缘同态交换. 同样对于形如

$$\theta : H^n(K, L; \mathbb{Z}) \to H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$
$$\theta : H^n(K, L; \mathbb{Z}_{p^h}) \to H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p)$$

的稳定运算, 它们可化为运算 St_p^i, Sq^i, δ_* (经 mod$p$ 约化), 并且另外还化为上述运算作用于元素 $\delta_h u$.

可以称稳定运算 $\theta : H^n(X; \mathbb{Z}_p) \to H^{n+q}(X; \mathbb{Z}_p)$ 具有 "维数"q:

$$\deg\theta = q.$$

那么所有稳定运算组成了一个分次 "斯廷罗德代数" A_p:

$$A_p = A = \sum_{q=0} A^q,$$

其中 A^0 为纯量积, A^q 为所有 q 维运算.

由上面所构造的表格, 我们得到在小维数 q 时的基代数 $A_p = A$.

$p = 2$:

$q=0$	1	2	3	4	5	6	7
1	Sq^1	Sq^2	Sq^3	Sq^4	Sq^5	Sq^6	Sq^7
			Sq^2Sq^1	Sq^3Sq^1	Sq^4Sq^1	Sq^5Sq^1	Sq^6Sq^1
						Sq^4Sq^2	Sq^5Sq^2
							$Sq^4Sq^2Sq^1$

$p > 2$:

$q=0$	1	2	$\cdots$	$2p-2$	$2p-1$
1	δ_*	0	0	St_p^1	$\delta_* St_p^1$
					$St_p^1 \delta_*$

我们来注意一些所得结果中的一种令人好奇的现象, 它特别出现在 $p = 2$ 的情形中: 基运算要比所有可能的斯廷罗德运算乘积 (复合) $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\cdots Sq^{i_k}$ 要少. 这表明在运算 Sq^i 的乘积关系间存在有非平凡的关系. 对这些关系的想法是这样的: 考虑乘积 $\mathbb{R}P_1^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P_n^\infty$ (其中 $\mathbb{R}P_i^\infty = \mathbb{R}P^\infty$) 和元素

$$u = t_1 \cdots t_n \in H^n(\mathbb{R}P_1^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P_n^\infty; \mathbb{Z}_2),$$
$$0 \neq t_i \in H^1(\mathbb{R}P_i^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

对于 t_i 我们有 $Sq^1 t_i = t_i^2, Sq^0 t_i = t_i, Sq^j t_i = 0$, 当 $j \neq 0, 1$. 由此知道, 对任意形如 $Sq^{i_1}\cdots Sq^{i_k}(u)$ 的运算可以只从斯廷罗德运算的形式化性质 $Sq^i(xy) =$

$\sum\limits_{j+k=i} Sq^j(x)Sq^k(y)$ 进行计算. 于是表明, 所有的基运算 $\theta \in H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ 在 $q < n$ 时非平凡地作用于元素 u 上: 如果 $\theta \neq 0$ 则 $\theta(u) \neq 0$.

对 $q \leqslant 8$, 我们对此直接验证得到了

$$q = 1 : Sq^1 u = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) u;$$

$$q = 2 : Sq^2 u = \left(\sum_{i<j} t_i t_j\right) u;$$

$$q = 3 : Sq^3 u = \left(\sum_{i<j<k} t_i t_j t_k\right) u, Sq^2 Sq^1 u = \left(\sum_{i} t_i\right)\left(\sum_{i<j} t_i t_j\right) = \sigma_1\sigma_2 u;$$

(设 $\sigma_j = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_j} t_{i_1}\cdots t_{i_j}$ 为初等对称多项式.)

$$\begin{aligned}
&q = 4 : Sq^4 u = \left(\sum_{i<j<k<l} t_i t_j t_k t_l\right) u = \sigma_4 u, Sq^3 Sq^1 u = \sigma_3\sigma_1 u;\\
&q = 5 : Sq^5 u = \sigma_5 u, Sq^4 Sq^1 u = \sigma_4\sigma_1 u; \qquad (11)\\
&q = 6 : Sq^6 u = \sigma_6 u, Sq^5 Sq^1 u = \sigma_5\sigma_1 u, Sq^4 Sq^2 u = \sigma_4\sigma_2 u;\\
&q = 7 : Sq^7 u = \sigma_7 u, Sq^6 Sq^1 u = \sigma_6\sigma_1 u, Sq^5 Sq^2 u = \sigma_5\sigma_2 u,\\
&\qquad Sq^4 Sq^2 Sq^1 u = \sigma_4\sigma_2\sigma_1 u;\\
&q = 8 : Sq^8 u = \sigma_8 u, Sq^7 Sq^1 u = \sigma_7\sigma_1 u,\\
&\qquad Sq^6 Sq^2 u = \sigma_6\sigma_2 u, Sq^5 Sq^2 Sq^1 u = \sigma_5\sigma_2\sigma_1 u.
\end{aligned}$$

由前面所给出的表格可看出, 所有基运算 $\theta \in A^q = A_2^q$, 其中 $q \leqslant 8$ 为线性无关地作用于元 u:

$$\theta(u) = 0 \leftrightarrow \theta = 0.$$

因此, 对于斯廷罗德代数 $A = A_2$ 中的基而言, 形如

$$Sq^{i_k}\cdots Sq^{i_1}, i_k \geqslant 2i_{k-1}, i_{k-1} \geqslant 2i_{k-2}, \cdots, i_2 \geqslant 2i_1. \qquad (12)$$

的乘积就足够了.

形如 (12) 的这些乘积元线性无关, 并且给出了代数 A_2 中的完全加法基.

我们可求出形如

$$Sq^i Sq^j = \sum_{a\geqslant 2b} \lambda_{a,b}^{i,j} Sq^a Sq^b,$$

$a \geqslant 2b, 0 < i < 2j$ 的关系式.

习题 18 对所有 q 求出系数 $\lambda_{a,b}^{i,j}$.

对 $q \leqslant 8$, 用表 (11) 经直接计算, 我们得到 $\lambda_{a,b}^{i,j} = \delta_{a+b}^{i+j} C_{j-b-1}^{i-2b}$ (这总是成立的). 因此我们得下面的关系表:

$$\begin{aligned} &Sq^1 Sq^1 = \delta_*^2 = 0, \\ &Sq^1 Sq^2 = Sq^3, \\ &Sq^1 Sq^3 = 0, \quad Sq^1 Sq^{2q} = Sq^{2q+1}, \\ &Sq^2 Sq^2 = Sq^3 Sq^1, \quad Sq^2 Sq^4 = Sq^5 Sq^1, \\ &Sq^3 Sq^3 = Sq^5 Sq^1. \end{aligned} \tag{13}$$

VI. 球面的第一个非平凡稳定同伦群的计算

考虑映射 $f: S^n \to K(\mathbb{Z}, n) = K$. 我们将此映射转换为纤维映射而不改变其同伦型; 在这里的 f^* 是 $H^n(S^n; \mathbb{Z})$ 与 $H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 的同构. 对纤维 $F = F_1$, 我们由同伦的正合序列得到 $\pi_i(F) = 0, i \leqslant n; \pi_i(F) = \pi_i(S^n), i \geqslant n+1$. 在维数 $n+q < 2n$ 时由纤维丛的谱序列推导出了一个正合序列 (其中 τ 为超渡)

$$0 \to H^{n+q}(F) \xrightarrow{\tau} H^{n+q+1}(K; \mathbb{Z}_p) \to 0, q > 0,$$

其理由是: 对 $p+q < 2n$ 有 $\sum\limits_{p+q=m} E_2^{p,q} = E_2^{m,0} + E_2^{0,m}$, 而且 $q > 0$ 时 $H^{n+q}(S^n) = 0, f^*: H^n(S^n) \approx H^n(K)$.

因此我们有:

$(n > q > 0)$:

$$H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_p) \overset{\tau}{\approx} H^{n+q+1}(K; \mathbb{Z}_p),$$

其中

$$\tau Sq^i = Sq^i \tau, \tau \delta_h = \delta_h \tau, \tau St_p^i = St_p^i \tau, H^j(F; \mathbb{Z}_p) = 0, j \leqslant n.$$

由群 $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$ 的表格得到 $H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_p)$ 的结果:

$p > 2$:

$q = 0$	1	$\cdots$	$2p-3$	$2p-2$
0	0	0	v	$\delta_* v$

结论 对于 $p > 2$, 当 $0 < q < 2p-3 < n$ 时, 在群 $\pi_{n+q}(F) = \pi_{n+q}(S^n)$ 中没有非平凡的 $p-$ 分支; 因为 $\delta_* v \neq 0$, 故群

$$\pi_{n+2p-3}^{(p)}(F) = \pi_{n+2p-3}^{(p)}(S^n) \neq 0;$$

在维数 $2p-3$ 处我们有

$$H_{n+2p-3}^{(p)}(F; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p = \pi_{n+2p-3}^{(p)}(S^n).$$

对于 $p=2$ 我们类比地得到 $\delta_*=Sq^1(2p-3=1)$:

$$\pi_{n+1}^{(2)}(S^n)=\mathbb{Z}_2=\pi_{n+1}(S^n),\quad \pi_{n+1}^{(p)}=0,p>2.$$

我们有上同调 $H^*(F;\mathbb{Z}_2)$ 连同斯廷罗德运算的作用于下表中:

$p=2$:

$$H^{n+q}(F;\mathbb{Z}_2)=H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2,n);\mathbb{Z}_2)=A^{q+1}.$$

$q=$	1	2	3	4	5	6
	v	Sq^1v	w	$Sq^1w=$	Sq^4i	Sq^3w
			$Sq^2v=0$	Sq^2Sq^1v	Sq^2w	Sq^5v

(14)

这里 $\tau(v)=Sq^2u,\tau(w)=Sq^4u$. 利用关系 $Sq^2Sq^2=Sq^3Sq^1$ 及条件 $Sq^1u=0$, 得到

$$Sq^2v=0. \tag{15}$$

因为 $Sq^2Sq^4=Sq^5Sq^1+Sq^6$, 故有关系

$$Sq^2w=Sq^6u. \tag{16}$$

由等式 $Sq^2Sq^3=Sq^5+Sq^4Sq^1$推出

$$Sq^1w=Sq^2Sq^1v. \tag{17}$$

转到下一个步骤. 考虑 (纤维丛) 映射

$$f:F_1=F\to K(\mathbb{Z}_2,n+1),\ \text{纤维为}\ F_2,$$

其中 $f_*:\pi_{n+1}(F)\to\pi_{n+1}(K(\mathbb{Z}_2,n+1))$ 为同构. 我们因而得到

$$\pi_j(F_2)=0,\quad j\leqslant n+1,$$
$$\pi_j(F_2)=\pi_j(F_1)=\pi_j(S^n),\quad j>n+1.$$

用谱序列和超渡 τ, 在稳定情形下可方便地表示出正合序列:

$$H^{n+q}(F;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{i^*}H^{n+q}(F_2;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\tau}A^q\xrightarrow{f^*}H^{n+q+1}(F;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{i^*}H^{n+q+1}(F_2;\mathbb{Z}_2),$$

其中 i^* 和 τ 都与斯廷罗德运算可交换, $A^q=H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2,n+1);\mathbb{Z}_2)$. 在映射 f^* 下, 基本类 $u\in H^{n+1}(K(\mathbb{Z}_2,n+1);\mathbb{Z}_2)$ 变到 v, 即

$$f^*(u)=v.$$

故而像 f^*A 由那些应用于元素 v 的斯廷罗德运算的像构成,

$$f^*A^q=A^q(v).$$

利用 $H^*(F;\mathbb{Z}_2)$ 的表格 (见前面), 我们便得到了上同调 $H^*(F_2;\mathbb{Z}_2)$ 的表格:

$q=$	2	3	4	5	6
	x	$\tilde{w}$	$Sq^1\tilde{w}=0$	$Sq^2\tilde{w}$	$Sq^3\tilde{w}$
		Sq^1x	$Sq^2x=\delta_2 w$	$Sq^3x=0$	Sq^4x

(18)

这里的 $\tilde{w}=i^*w, x=\tau^{-1}(Sq^2u)$ (因为 $Sq^2v=0$ 和 $v=f^*(u)$, 故 $f^*(Sq^2u)=0$). 故而 $Sq^2u=\tau(x), x\in H^{n+2}(F_2;\mathbb{Z}_2)$. 另外, $Sq^2(Sq^2u)=Sq^3Sq^1u\neq 0$, 因而

$$f^*(Sq^2Sq^2u)=\tau(Sq^2x), Sq^2x\in H^{n+4}(F_2;\mathbb{Z}_2).$$

因为 $Sq^2Sq^1v=f^*(Sq^2Sq^1u)$, 在表 (18) 中的关系 $Sq^1\tilde{w}=0$ 可由表 (14) 的关系 $Sq^1w=Sq^2Sq^1v$ 推出.

设 $a=Sq^2Sq^1v=Sq^1w=\delta_1 w, b=Sq^2x=\tau^{-1}(Sq^2Sq^2u)=\tau^{-1}Sq^1(Sq^2Sq^1u)$. 有下面的一般性命题:

引理 2 如果 $a=f^*(\bar{a})=\delta_h w, b=\tau^{-1}\delta_h(\bar{a})$, 则在 $H^*(F_2;\mathbb{Z}_2)$ 中元素 b 和 $\tilde{w}=i^*w$ 满足 $b=\delta_{h+1}\tilde{w}$.

证明 引理由在上链复形 $C^*(E;\mathbb{Z})$ 中的上边缘同态的初等性质得到. 我们将其证明细节留给读者. □

用引理 2 我们得到: $Sq^1=\delta_*=\delta_1, a=Sq^1w, b=Sq^2x, Sq^2x=\delta_2\tilde{w}$. 因此特别有 $Sq^3x=\delta_*\delta_2\tilde{w}=0$.

结论 因为 $Sq^1x=\delta_1x\neq 0$, 故 (考虑到 $\pi_{n+2}(F_2)=H_{n+2}(F_2;\mathbb{Z})$) 有

$$\pi_{n+2}(S^n)=\pi_{n+2}^{(2)}(S^n)=\pi_{n+2}^{(2)}(F_2)=\mathbb{Z}_2.$$

现在进到第三步. 考虑 (纤维丛) 映射

$$f: F_2\to K(\mathbb{Z}_2, n+2), \text{纤维为} F_3.$$

映射 $f_*|_{\pi_{n+2}(F_2)}$ 为同构. 对于 F_3, 由同伦的正合序列得到

$$\pi_j(F_3)=0,\quad j\leqslant n+2,$$
$$\pi_j(F_3)=\pi_j(F_2)=\pi_j(S^n),\quad j\geqslant n+3.$$

在稳定情形 $q<n$, 谱序列又导出了正合的

$$H^{n+q}(F_2;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{i^*}H^{n+q}(F_3;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\tau}A^{q-1}\xrightarrow{f^*}H^{n+q+1}(F_2;\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{i^*},$$

其中 $A^{q-1}=H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2,n+2);\mathbb{Z}_2)$.

按定义 $x = f^*(u)$, 其中 u 为上同调 $H^{n+2}(K(\mathbb{Z}_2, n+2); \mathbb{Z}_2)$ 中的基本类. 因此我们得到

$$f^*(A^{q-1}) = A^{q-1}(x).$$

对于上同调 $H^{n+q}(F_3; \mathbb{Z}_2)$ 我们有表格

$q =$	2	3	4	5
	0	$\tilde{\tilde{w}}$	$\delta_3\tilde{\tilde{w}}$	$Sq^2\tilde{\tilde{w}}$

其中 $\tilde{\tilde{w}} = i^*\tilde{w}, \delta_3\tilde{\tilde{w}} = \tau^{-1}\delta_2\tilde{w}$, 这由引理 2 得到 (见前面).

结论 因为 $\delta_3\tilde{\tilde{w}} \neq 0$, 故

$$\pi_{n+3}^{(2)}(S^n) = \pi_{n+3}^{(2)}(F_3) = H_{n+3}^{(2)}(F_3; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8.$$

又因为 $\pi_{n+3}^{(3)}(S^n) = \mathbb{Z}_3$, 及 $p > 3$ 时 $\pi_{n+3}^{(p)}(S^n) = 0$, 故我们有下面的结果:

定理 6 在 $q < n-1$ 时稳定同伦群 $\pi_{n+q}(S^n)$ 取下面的值 (对 $q \leqslant 2$ 也可参看 [1], 卷 II, §23)

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2, \pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2,$$
$$\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{24}.$$

习题 19 计算 $\pi_{n+q}(S^n), q \leqslant 9$.

我们注意到, 当 $q \geqslant 10$ 出现了一些很严重的难点, 但是却是可以克服的. 经过较困难的计算我们可以得到 $q \leqslant 30$ (或相近) 的所有群 $\pi_{n+q}(S^n)$. 虽然在现今的文献中也可以找到许多关于高次同伦群的定性的信息, 但是对所有 q 的普遍答案几乎不可能有完整的形式.

VII. 胞腔复形的映射的稳定同伦类

常常有这样的情形: 给出了一个 $(n-1)$ 连通的胞腔复形 K, 而它没有 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 维的胞腔. 在这种情形譬如说, 要求计算复形 X 到 K 的映射的稳定同伦类; 这时假设 $\dim X < 2n-1$.

另一个问题是: 研究映射 $f: X^{n+q} \to K$ 到 $(n+q+1)$ 骨架的延拓障碍 $\alpha(f)$, 其中 $q < n-2$. 过去曾经证明过, 对于纤维丛 $E \xrightarrow{p} B$, 纤维为 F, 底为 $(n-1)$- 连通时, 对于其同调的谱序列在维数小于 $2n-2$ 之前可推出正合列

$$H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \xrightarrow{\tau} H^*(B) \xrightarrow{p^*} H^*(E).$$

我们看出, 在 "稳定的" 维数处, 斜积的同调群与同伦群一样的复杂. 可以说, 在维数 $\leqslant 2n-2$ 时, 纤维丛 $p: E \to B$ 的同调理论与偶对 (E, F), 其中 $B \sim E/F$, 的是一样的, 这是因为 E 中不在 B 或 F 中的非平凡胞腔可能首先出现在维数 $2n$ 处 (底和纤维的胞腔积). 因此, 在稳定的维数处有一些简化的想法.

引理 3 映射的稳定同伦类形成阿贝尔群 $[X, K]$.

证明 考虑两个映射 f, g

$$f : X \to K, \quad g : X \to K$$

和它们的直积

$$f \times g : X \to K \times K,$$

其中 $(f \times g)(x) = (f(x), g(x))$.

(注意我们一开始对 K 和 X 的假设.) 复形 $K \times K$ 为 $(n-1)$– 连通; 它没有维数 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 的胞腔, 并且在胞腔映射下的像 $(f \times g)(X)$ 位于维数 $k \leqslant \dim X$ 的骨架中. 因为 $K \times K$ 中不在 $K \vee K$ 中的 "多余" 胞腔出现在维数 $2n$ 中, 故当 $k \leqslant 2n-2$ 时, 像 $(f \times g)(X)$ 便落在了 $K \vee K \subset K \times K$ 里. 存在有显然的 "重叠" 映射

$$\chi : K \vee K \to K,$$

它在每个分项上为恒同映射.

定义同伦类的和为

$$f, g \in [X, K], \quad f + g = \chi(f \times g),$$

其中假定了 f 和 g 为胞腔映射, 且 $\dim X \leqslant 2n-2$. 这个运算的群性质和阿贝尔性是显然的 (请验证!). □

引理 4 设已给出稳定映射 $f : X^{n+q} \to K$ 和这个映射延拓到骨架 X^{n+q+1} 的障碍 $\alpha(f) \in C^{n+q+1}(X^{n+q+1}, \pi_{n+q}(K))$ (参看 §9), 于是障碍 $\alpha(f)$ 在加法运算下依赖于 $f \in [X, K]$, 从而满足 $\alpha(\lambda f) = \lambda \alpha(f)$.

证明 障碍 $\alpha(f)$ 在 σ^{n+q+1} 的值由映射

$$\partial \sigma^{n+q+1} = S^{n+q} \to K$$

定义. 在映射的加法 $f + g = \chi(f \times g)$ 下, 由 f 和 g 所确定的延拓由映射 $\partial \sigma^{n+q+1} \to K$ 确定, 它的可加性由群 π_1 的可加性确定 (这里是稳定的情形, 它与起点的关联以及与 π_1 的作用无关). □

我们已经构造了映射 $f : K \to \prod\limits_{n_j \geqslant n}^{2n-1} K(D_j, n_j)$, 它给出了 $\mathbb{Q}$– 上同调的, 从而同伦群 $\pi_j(K) \otimes \mathbb{Q}$ 的直至 $(2n-2)$ 维的同构 (见前面的 Ⅲ). 这里的群 D_j 为自由阿贝尔群.

我们来构造骨架上的 "逆" 映射

$$g:\left(\prod_{n_j\geqslant n}^{2n-1}K(D_j,n_j)\right)^{2n-2}\to K,$$

使得 $f_*g_*=\lambda\neq 0$ 在 $j<2n-2$ 时的 $\mathbb{Q}-$ 上同调和同伦群 $\pi_j\otimes\mathbb{Q}$ 中成立, 即 $f_*g_*(x)=\lambda x, g_*f_*(y)=\lambda y$. 我们将构造这样的 "逆" 映射 g. 我们按照骨架进行归纳构造. 设 (归纳假定) 障碍发生在已经构造好了的映射 g_{n+q} 的延拓时: 要把 g_{n+q} 从 $(n+q)$ 维骨架延拓到 $(n+q+1)$ 维的骨架上, 这个障碍是具有限阶 μ 的上同调类. 之后, 利用引理 3 和 4. 转移到映射 $\mu\cdot g_{n+q}$, 并且在 $(n+q)$ 维骨架上改变它, 给出了零障碍 (参看 §9). 延拓类 (μg_{n+q}) 的映射到 $n+q+1$ 维的骨架上, 从而得到了映射 g_{n+q+1} 等等. 最终给出了映射 g. 我们来证明在 $n+q$ 骨架上映射 g_{n+q} 的上同调障碍类的阶的有限性. 骨架 $\left(\prod_{n_j\geqslant n}K(D_j,n_j)\right)^{2n-2}$ 同伦等价于骨架的束 $\bigvee_{n_j\geqslant n}(K(D_j,n_j))^{2n-2}$. 每个复形 $(K(D_j,n_j))^{2n-1}$ 只有在上同调的第一个非平凡的维数 n_j 才有无穷阶的元, 其根据是前面第 **V** 小节中关于 $K(\pi,n)$ 型复形的有理上同调的结果. 在构造逆映射 g_{n+q} 时, 我们分别在束 $\bigvee_j(K(D_j,n_j))^{2n-2}$ 的每一个分项上构造它. 所以我们只遇到了有限的阶.

由此得到

定理 7　对任意复形 X,X 到 $(n-1)-$ 连通复形 K 的映射的稳定同伦类 $(\dim X\leqslant 2n-2)$ 构成阿贝尔群 $[X,K]$, 对其成立

$$[X,K]\otimes\mathbb{Q}\approx\operatorname{Hom}(H^*(K;\mathbb{Q})\to H^*(X;\mathbb{Q})).$$

这表明, 在相差一个有限阶元的范围内, 同伦类被 $\mathbb{Q}-$ 上同调的同态确定; 于是, 任何一个纯代数的同态 $a^*:H^*(K;\mathbb{Z})\to H^*(X;\mathbb{Z})$ 或 $a_*:H_*(X;\mathbb{Z})\to H_*(K;\mathbb{Z})$ 可以乘以一个非零数 $\lambda\neq 0, a^*\mapsto\lambda a^*, a_*\mapsto\lambda a_*$, 使得同态 λa^* (或 λa_*) 可由连续映射 $f:X\to K$ 来实现.

§11. 同调与基本群

设有非单连通的 (胞腔或单纯的) 复形 K, 它的基本群为 $D=\pi_1(K)$. 考虑其万有覆叠

$$p:\hat{K}\to K,$$

其中群 D 自由且离散地作用于 $\hat{K}$, 并将胞腔 (单形) 变到胞腔 (单形). K 中的每个胞腔 σ_γ^i 对应于一个胞腔组

$$p^{-1}(\sigma_\gamma^i)=\sigma_{1\gamma}^i\cup\sigma_{2\gamma}^i\cup\cdots,$$

其个数等于 $D=\pi_1(K)$ 中的元素的个数. 群 D 在作用于 $p^{-1}(\sigma^i_\gamma)$ 时由胞腔 $\sigma^i_{\alpha\gamma}$ 间的置换确定. 在逆像 $p^{-1}(\sigma^i_\gamma)$ 中选定一个胞腔, 以 $\hat{\sigma}^i_\gamma$ 记之.

所有 $\hat{K}$ 中的胞腔便有形式

$$\sigma^i_{\alpha\gamma}=g(\hat{\sigma}^i_\gamma),\quad g\in D=\pi_1(K),$$

其中的所有 $g(\hat{\sigma}^i_\gamma)$ 互不相同. $\hat{K}$ 的任意链具有形状

$$a=\sum_{j,\gamma}\lambda_{j\gamma}g_j(\hat{\sigma}^i_\gamma),\quad a\in C^i(\hat{K}),\tag{1}$$

其中 $\lambda_{j\gamma}$ 为整数.

$\hat{K}$ 上的边缘算子 ∂ 与群 D 在胞腔上的作用可交换, 也与乘以数 λ_j 的运算可换; 可以自然地引进 "群环" $\varGamma=\mathbb{Z}[D]$, 其元素为有限和 $\sum\lambda_j g_j$, λ_j 为整数, $g_j\in D$, 乘法的形式为

$$\left(\sum_i\lambda_i g_i\right)\left(\sum_k\lambda'_k g'_k\right)=\sum_{i,k}\lambda_i\lambda'_k g_i g'_k.$$

由复形 $\hat{K}$ 的链 (1) 的形式看出, 这是个系数在环 $\varGamma$ 中的链 (如果群 D 非交换则可能它也是非交换的).

到任意环 $\varGamma'$ 的同态 $\rho:\varGamma\to\varGamma'$ 让我们可以考虑 $\hat{K}$ 上系数在 $\varGamma'$ 中的链复形:

$$\rho(a)=\sum_\gamma\rho\left(\sum\lambda_{j\gamma}g_{j\gamma}\right)\hat{\sigma}^i_\gamma,\quad a\in C_i(\hat{K}),$$

是系数在 $\varGamma'$ 中的链. 另外, 允许以 $\varGamma'$ 中的任意元去乘链 $\rho(a)$; 这个乘法与 ∂ 可交换. 称这个复形的同调群为**系数在表示 $\rho:\varGamma\to\varGamma'$ 中的同调群**, 其中 $\varGamma=\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$, 并以 $H^\rho_i(K)$ 表示这个同调群.

例 1 如果 $\varGamma'=\varGamma,\rho\equiv 1$, 则由定义有

$$H^\rho_i(K)=H_i(\hat{K}).$$

例 2 如果 $\mathbb{Z}=\varGamma',\rho:\varGamma\to\mathbb{Z}$ 为

$$\rho\left(\sum\lambda_j g_j\right)=\sum\lambda_j,$$

于是

$$H^\rho_i(K)=H_i(K).$$

(请验证!)

例 3 设 K 为非定向流形, $K = M^n$, 那么也可引进 "有向道路" 的概念, 即一个同态 $\varphi : \pi_1(K) \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ (参看 [1], 卷 Ⅱ, §17); 由它产生了同态

$$\rho : \Gamma \to \mathbb{Z},$$

其中

$$\rho\left(\sum \lambda_i g_i\right) = \sum \lambda_i \varphi(g_i).$$

称同调群 $H_i^\rho(K)$ 为 "具局部参数的同调群". 利用对偶复形可以以显然的方式定义上同调 $H_\rho^i(K)$.

习题 1 证明对闭流形 M^n 成立 $H_n^\rho(M^n) = \mathbb{Z}$.

设存在纤维丛 $p : E \to B$, 其纤维为 F, 且 $\pi_1(B) = D$ 作用于 $H_q(F), g : H_q(F) \to H_q(F), g \in D$. 事实上给出了环 $\Gamma = \mathbb{Z}[D]$ 在 $H_q(F) = M_q$ 上的作用. 更一般地, 设作用环 Γ 中的元像在线性空间 M 上的算子那样作用 (或者说, 给出了环 Γ 的一个表示, 表现为线性变换 $M \to M$ 的形式). 我们来定义同调群 $H_i^\rho(B, M)$. 设 $B = K$, 以及给出 $\Gamma-$ 链的复形 $\hat{K}$ (见前面). 形式地定义在 M 中取值的链:

$$a = \sum_j m_j \hat{\sigma}_j^i, \quad m_j \in M,$$

环 Γ 在这些链上的作用为

$$g(a) = \sum_j g(m_j) \hat{\sigma}_j^i,$$

其中 $g(m)$ 由表示 ρ 确定. 这个作用与边缘 ∂ 可交换, 而 ∂ 的定义是自然的.

于是产生了记为 $H_i^\rho(B, M)$ 的同调群, 其中 Γ 以表示 ρ 作用于 M (或者可以说成是: M 为 $\Gamma-$ 模). 像通常那样, 通过对偶的上链复形定义上同调群 $H_\rho^i(B, M)$.

对于纤维为 F 的纤维丛 $p : E \to B$, 群 $H_j(F)$ 是个 $\Gamma-$ 模, 这是因为 $\pi_1(B)$ 经过 "平行移动" 作用于纤维上. 我们得到了同调 $H_q^\rho(B, H_j(F))$.

注 在非单连通的底空间情形时勒雷定理 (参看 §8) 中的 $E_{q,j}^{(2)} \neq H_q(B, H_j(F))$. 应该将其修订为 $E_{q,j}^{(2)} = H_q^\rho(B, H_j(F))$. 表示 ρ 度量了算子 d_1 的 "畸变". 定理其余的部分仍是正确的.

例 4 对于覆叠 $p : E \to B$, 其纤维为 k 个点 $F = P_1 \bigcup \cdots \bigcup P_k$, 我们有 $H_q(F) = 0, q \neq 0, H_0(F) = M$ 具秩 k. 群 $\pi_1(B)$ 作用于纤维 F 上, 从而作用于群 $M = H_0(F)$ 上.

习题 2 证明等式

$$H_q^\rho(B,H_0(F))=H_q(E),\quad H_\rho^q(B,H^0(F))=H^q(F).$$

习题 3 计算群 $H_0^\rho(B,M)$ 和 $H_\rho^0(B,M)$, 其中的 ρ 为 Γ 在线性空间自同构中的任意表示.

习题 4 计算透镜空间 (参看 §4)$L_m^{2n-1}(q_1,\cdots,q_{n-1})$ 对于表示 $\rho:\pi_1(L)=\mathbb{Z}_m\to$ (作用于 $\mathbb{C}=M$ 上的 m 次单位根) 的上同调群.

提示. 构造这样的线性表示

$$\rho:\mathbb{Z}_m\to GL(k,\mathbb{C}),$$

使得对所有 $q=0,1,2,\cdots$,

$$H_q^\rho(L_m^{2n-1}(q_1,\cdots,q_{n-1}))=0.$$

首先对 $n=2$ 进行构造 (三维透镜).

习题 5 显式地找出球面 S^{2n-1} 的胞腔剖分, 使它对于群 $\mathbb{Z}_m$ 的作用不变, 这个作用由在基上变换 T 的作用决定:

$$(z_1,\cdots,z_n)\overset{T}{\longmapsto}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}}z_1,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}q_1}{m}}z_2,\cdots,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}q_{n-1}}{m}}z_n\right)\ (|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=1)$$

(参看 §4). 对于 $n=2$, 这个胞腔剖分有胞腔

$$T^j\sigma^0,T^j\sigma^1,T^j\sigma^2,T^j\sigma^3;j=0,1,\cdots,m-1,$$

和边缘算子

$$\partial\sigma^0=0,\quad \partial\sigma^1=(1-T)\sigma^0,$$
$$\partial\sigma^2=(1+T+\cdots+T^{m-1})\sigma^1,\quad \partial\sigma^3=(1-T^q)\sigma^2.$$

运用群 π_1 的使得所有 $q\geqslant 0, H_q^\rho(M^n,\mathbb{C}^n)=0$ 的线性表示, 我们构造一个有趣的拓扑不变量:"赖德迈斯特 (Reide − meister) 挠率". 考虑表示 ρ 的链复形. 链群在这里是个具特定基 (胞腔 $\hat{\sigma}_\gamma^q$) 的复线性空间. 由条件 $H_q^\rho=0,q\geqslant 0$, 我们有了链的正合序列

$$0\to C_n^\rho\xrightarrow{\partial}C_{n-1}^\rho\to\cdots\xrightarrow{\partial}C_0^\rho\to 0,$$

其中在每个 C_j^ρ 中有特定的基 $e_\gamma^{(j)}=\{\hat{\sigma}_\gamma^j\}$, 它在 $\hat{\sigma}_\gamma^j\to\pm g(\hat{\sigma}_\gamma^j),g\in\pi_1$ 的范围内被确定. 现在在 C_{n-1}^ρ 中选取另一组基, 其中一部分是由 $\hat{\sigma}_\gamma^n$ 得到的群 ∂C_n^ρ 中的基构成, 第二部分则是在空间 $C_{n-1}^\rho/\mathrm{Im}\partial$ 中任选的.

以 $\bar{e}^{n-1}$ 表示 C^{ρ}_{n-1} 的新基. 由新基到另一组基的变换行列式为 $\det(e^{n-1}, \bar{e}^{n-1})$. 在第二部分 $C^{\rho}_{n-2}/\mathrm{Im}\partial$ 的基 $\bar{e}^j$ 经 ∂ 变到 C^{ρ}_{n-2} 中; 在那里这个基补充为 C^{ρ}_{n-2} 的完整的基, 其中补足的是由选取了 $C^{\rho}_{n-2}/\mathrm{Im}\partial$ 中的基完成的. 便有了 C^{ρ}_{n-2} 中的基 $\bar{e}^{n-2}$. 由 C^{ρ}_{n-2} 中老的基到新基的变换行列式为 $\det(e^{n-2}, \bar{e}^{n-2})$ (C^{ρ}_q 中的 "老" 基由胞腔固定!). 继续下去, 转移到 C^{ρ}_{n-3} 中, 等等. 我们得到了整个 C^{ρ}_k 的基 $\bar{e}^k$ 和数组 $\det(e^k, \bar{e}^k)$.

考虑数

$$\begin{aligned}R(C,\rho) = & \det(e^{n-1}, \bar{e}^{n-1})\det(e^{n-2}, \bar{e}^{n-2})^{-1}\cdots\det(e^{n-k}, \bar{e}^{n-k})^{(-1)^{k+1}}\cdots \\ & \det(e^0, \bar{e}^0)^{(-1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

称这个数 R 为 "赖德迈斯特挠率". 选取基胞腔及其定向的随意性导至了 $R \to \lambda R$ 的变化, 其中 $\lambda = \pm\det\rho(\pi_1)$.

我们发现, 赖德迈斯特挠率与剖分无关 (准确到一个因子 $R \to \lambda R, \lambda = \pm\det\rho(\pi_1)$), 并且是复形的拓扑 (逐段线性地) 不变量和流形的微分同胚不变量. 我们不打算证明它 (参看 [63]).

习题 6 对三维透镜 $L^3_p(q)$ 计算挠率 R, 其中 q 为 $\mathrm{mod}p$ 同余, $\rho: \mathbb{Z}_p \to \sqrt[p]{1}, M = \mathbb{C}$, 而 $\mathbb{Z}_p$ 以乘因子 $\sqrt[p]{1}$ 于 M 上.

透镜空间 $L^3_p(q)$ 的上同调环在奇数 p 和任意 q 下有两个生成元 $u \in H^1, v \in H^2$:

$$\begin{aligned}&H^0(L;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p,\\ &H^1(L;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(u),\\ &H^2(L;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(v), \quad v = \delta_* u(\mathrm{mod}p),\\ &H^3(L;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(w)\end{aligned}$$

($\pm w$ 为群 $H^3(L;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 的生成元的 $\mathrm{mod}p$ 约化).

习题 7 证明在 $H^*(L;\mathbb{Z}_p)$ 中的乘积有形式

$$uv = qw. \tag{2}$$

我们记得, 透镜空间 $L = L^3_p(q)$ 的构造是 $L = S^3/\mathbb{Z}_p$, 其中生成元 $q \in \mathbb{Z}_p$ 以下面方式作用于球面 S^3 (参看 §4):

$$(z_1, z_2) \to \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i}{p} q} z_2\right), \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

因为 $\delta_* u = v$, 并且 w 在差一个符号下被唯一确定; 在变换 $u \to \lambda u, w \to \pm w$ 之后 (λ 与 p 互素), 知 q 有了选取的随意性. 于是由 (2) 得到

$$u \to \lambda u, v \to \lambda v, w \to \pm w, uv \to \pm\lambda^2 qw.$$

结论 因为上同调环和算子 δ_*, ∂_* 为同伦不变, 故而如果对 q, 把所有余数 $\bar{q} = \pm\lambda^2 q(\text{mod}p)$ 看作是透镜空间的同伦不变量, 它们则是等价的. 例如:

a) $p = 3, q = 1$ 或 $\bar{q} = 2$; 余数形式 $\pm\lambda^2$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 中的 1 和 $2(\lambda \neq 0)$.

b) $p = 5, q = 1,2,3,4; \lambda^2 = (1,4,9 \cong 4, 4^2 = 16 \cong 1)$; 余数形式 $\pm\lambda^2$ 为 $\mathbb{Z}_5$ 中的 1 和 4; 因此 $L_5^3(1)$ 和 $L_5^3(2)$ 同伦不等价.

c) $p = 7, q = 1,2,3,4,5,6; \lambda^2 = 1,4,2,2,4,1; -\lambda^2 = 6,3,5,5,3,6$; 这里同伦不变量 $\pm\lambda^2 q$ 没有给出新信息, 这是因为 $\pm\lambda^2$ 是全部的非零 (mod7) 剩余.

习题 8 利用挠率 R 决定对 $p = 7$ 时哪些透镜空间是拓扑不同的.

注 在这里第一次出现同伦等价但拓扑不同的流形, 这是有趣的现象. 对单连通流形, 这是个复杂的问题.

系数在 $\Gamma = \mathbb{Z}[\pi_1]$ 的表示 ρ 中的同调和上同调群也出现在映射的延拓问题中, 即把从子复形 $L \to X$ 的映射延拓到复形 $K \supset L$ 上, 这里的 $\pi_1(X)$ 作用在 $\pi_n(X)$; 以及在对纤维丛的截影的延拓问题中; 参看 §9, 在那里这些问题是在单连通情形下考虑的.

作为一个有趣的例题, 我们考虑在 n 维流形上构造一个具已知符号差的度量的问题, 例如在四维流形 M^4 上构造具符号差 $(+---)$ 的度量. 因为在闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}_{1,3}$ 中, 光锥的内部以典型的形变同伦地收缩为一维时间轴, 于是在 $\mathbb{R}^4$ 中所有可能的光锥的集合 (即 $(+---)$ 型的二次型 g_{ab}) 同伦等价于它的方向的集合 $\mathbb{R}P^3$ (对 $\mathbb{R}^n$ 则为 $\mathbb{R}P^{n-1}$). 所以, 我们的问题等价于构造 M^4 上的一维方向场 (或一维叶状结构) 即切丛

$$p: E \to M^4, \text{ 纤维 } F = \mathbb{R}P^3.$$

的截影. 因为典型的向量场的奇点集中在孤立点上 (即对向量场而言, 从 3 维骨架延拓到 4 维的场时出现的障碍), 故这对于方向场一样是对的. 我们有障碍上链 α (参看 §9), $\alpha \in C^4(M^4, \pi_3(F)) = C^4(M^4, \mathbb{Z})$, 其中 $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. 我们注意到, 这个上链可以被恰当地看成是群 $H_\rho^4(M^4, \pi_3(F))$ 中的上同调类, 其中 $\pi_1(M^4)$ 作用于 $\pi_3(F)$ 上.

习题 9 证明, 如果在群 $H_\rho^4(M_4, \pi_3(F))$ 中 $\alpha \sim 0$, 则可以在底空间的 3 维骨架上改变截影 (方向场), 使得 $\alpha \equiv 0$, 从而可以构造出在整个 M^4 上的截影.

另外还有两种情形.

1) 流形 M^4 为定向和紧的. 这时 $\pi_1(M^4)$ 在 $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}$ 上的作用为平凡, 故 $H_\rho^4(M^4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

习题 10 证明 $\alpha = \chi(M^4)$ 为欧拉示性类 (正如对向量场的情形那样).

2) 流形 M^4 为非定向的. 这时我们有 $\alpha \in H^4_\rho(M^4;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, 其中 ρ 为 $\pi_1(M^4)$ 在 $\pi_3(F) = \mathbb{Z}$ 上的非平凡表示.

习题 11 证明在这种情形中 $\alpha = \chi(M^4)$.

因此在这两种情况中, 方向场 (叶状结构) 的存在性 (符号差为 $(+---)$ 的度量) 等价于 $\chi(M^4) = 0$

对于非闭流形可以在 M^4 上构造出度量 g_{ab}, 它既靠近这个闵可夫斯基度量又在一个紧集之外. 因此开流形 (拓扑地) 有一个点 ∞ 的紧化流形 $\overline{M}^4 \supset M^4$. 由闵可夫斯基度量的性质, 就在点 $\infty \in \overline{M}^4$ 上有一个所求方向场的二阶奇点 (请证明!) 出现这样的问题: 在 $\overline{M}^4$ 上能够构造只具有一个二阶奇点的方向场吗? 这个问题可化为前面的样子, 但要求 $\chi(\overline{M}^4) = 2$ 或 $\chi(M^4) = 1$.

习题 12 证明在流形 M^{n+1} 上方向场的同伦类 (或 $(1,n)$ 型的度量) 由同态 $\pi_1(M^{n+1}) \to \mathbb{Z}_2 = (\pm 1)$ (沿此闭道一周改变了方向时给出 -1) 连同一个上同调类

$$\gamma \in H^n_\rho(M^{n+1}, \pi_n(\mathbb{R}P^n))$$

确定.

例 5 设从 $\mathbb{R}^3$ 中去掉一条直线和一个点. 余下的区域 $U \subset \mathbb{R}^3$ 具有同伦型 $S^2 \vee S^1$ (束). 设在区域 U 中给出了方向场

$$U \xrightarrow{f} \mathbb{R}P^2.$$

同伦类 $[f]$ 由同态 $\pi_1(U) = \mathbb{Z} \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ 和上同调类 $\pm\gamma$

$$\pm\gamma \in H^2_\rho(U;\pi_2(\mathbb{R}P^2)) = H^2_\rho(S^2 \vee S^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

决定, 其中由于 $f_*(\pi_1(U)) \subset \pi_1(\mathbb{R}P^2), \pi_1(U) = \mathbb{Z}$ 作用于 $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$. 在这种情形中引起了方向逆转 (作用 ρ 非平凡). $K = S^2 \vee S^1$ 上的万有覆叠空间 $\hat{K}$ 有在图 45 中显示的形状. 所有的 2 维上链都是上闭链, 它的上同调不为零:

$$C^2_\rho(K) = H^2_\rho(K) = \mathbb{Z} \ \ (\text{请验证!}).$$

作为有用的例子我们考虑环面 T^2 到射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的映射的同伦类问题:

$$f : T^2 \to \mathbb{R}P^2.$$

它所诱导的基本群间的同态.

$$f_* : \pi_1(T^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$$

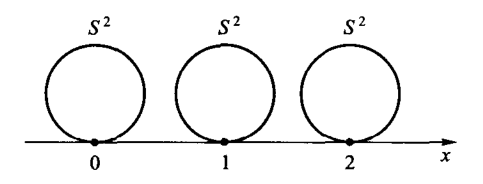


图 45 作用为 $x \longmapsto x+1$

是最简单的同伦不变量. 如果同态 f_* 平凡, 则映射 f 在一维骨架上收缩为一个点. 这样的映射 (使 $f_*(\pi_1)=0$) 的同伦类被化为球面 S^2 到 $\mathbb{R}P^2$ 的映射的同伦类, 并且被映射度唯一决定 (请验证!). 更有趣的情况是同态 f_* 非平凡. 不失一般性, 不妨认为 $f_*(a)=1, f_*(b)=0$, 其中 a 和 b 分别为环面的经线和纬线. 我们考虑两个映射 f 和 $g: T^2 \to \mathbb{R}P^2$ 使得 $f_*=g_*$. 假定在此环面上给出了标准的胞腔剖分

$$\sigma^0, \sigma_1^1 = a, \sigma_2^1 = b, \sigma^2,$$

我们从条件 $f_* = g_*$ 出发, 利用映射 f 和 g 的同伦进行变换, 使得它们在一维骨架上重合. 在边缘 $\partial\sigma^2$ 上重合的映射 f 和 g, 它们在胞腔 σ^2 上定义了群 $\pi_2(\mathbb{R}P^2)=\mathbb{Z}$ 中的 "特定元", 记为 $\alpha = \alpha(\sigma^2, f, g) \in \mathbb{Z} = \pi_2(\mathbb{R}P^2)$ 它是上同调群

$$H_\rho^2(T^2; \pi_2(\mathbb{R}P^2)) \tag{3}$$

中的元. 这里的 $\rho = f_* = g_*$.

习题 13 证明当 ρ 非平凡时群 (3) 等于 $\mathbb{Z}_2$.

因此, 对基本群间一个固定的 f_*, 我们最多只有映射 $f: T^2 \to \mathbb{R}P^2$ 的两个不同的同伦类.

§12. 超椭圆黎曼面的上同调. 雅可比环面. 多轴椭圆体上的测地线. 与有限间断位势的关联

亏格 g 的超椭圆黎曼面由方程

$$w^2 - P_{2g+1}(z) = 0 \ \text{或} \ w^2 - \widetilde{P}_{2g+2}(z) = 0$$

给出, 其中 $P_{2g+1}(z), \widetilde{P}_{2g+2}(z)$ 为无重根的 $2g+1$ 和 $2g+2$ 次的多项式 (参看 [**1**], 卷 II, §4).

在任一黎曼面 R 上定义有全纯微分形式 ω (第一型微分), 在局部坐标 $z=u+iv$ 中它的形状为

$$\omega = f(z)dz,$$

其中 $f(z)$ 为 z 的复解析函数. $f(z)$ 的形状将在后面给出.

在上述亏格 $g>0$ 的超椭圆黎曼面 R_g 的重要例子中, 其全纯微分的形式为

$$\omega_k=\frac{z^{k-1}}{w}dz=\frac{z^{k-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}}dz,\quad k=1,2,\cdots,g, \tag{1}$$

其中的这个曲面由多项式 $P_{2g+1}(z)=\prod\limits_{i=1}^{2g+1}(z-z_i)$ 给出, 次数为 $2g+1$.

我们来验证这个微分的全纯性. 在点 $z=z_i$ (多项式 P_{2g+1} 的零点) 和 $z=\infty$ 的全纯性是显见的: 在点 $z=z_i$ 的邻域内可取 $\zeta=\sqrt{z-z_i}$ 为局部参数. 于是 $z=\zeta^2+z_i, dz=2\zeta d\zeta$, 从而表达式 (1) 具有形式

$$\omega_k=2\frac{(\zeta^2+z_i)^{k-1}}{\sqrt{\prod\limits_{j\neq i}(\zeta^2+z_i-z_j)}}d\zeta, \tag{2}$$

故微分 ω_k 在 $z=z_i$ 是全纯的. 在无穷远点 $z=\infty$ 处以 $\zeta=\dfrac{1}{\sqrt{z}}, z=\dfrac{1}{\zeta^2}, dz=-\dfrac{2d\zeta}{\zeta^3}$ 为局部参数, 由此得到

$$\omega_k=\frac{2\zeta^{2(g-k)}}{\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{2g+1}(1-\zeta z_i)}}d\zeta, \tag{3}$$

故 ω_k 在 $k\leqslant g$ 时也为全纯.

任意的全纯微分 ω 都是局部恰当的: $\omega\subset f(z)dz=d\tilde{f}(z)$, 其中 $\tilde{f}(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数, 它也是复解析函数. 所以, 在曲面 R 上的 1− 形式 ω 为闭形式: $d\omega=0$. 由于在复曲面 R 上没有非平凡的全纯函数 (参看 [1], 卷 II, §4), 故非零形式 ω 不可能是 (整体) 恰当的. 类似地, 形式 $\overline{\omega}=\overline{f(z)}d\bar{z}$ 也为闭但非恰当.

形式 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 对于超椭圆曲面 R_g 为线性无关 (在复数上). 所以形式 $\mathrm{Re}\omega_k=\dfrac{1}{2}(\omega_k+\overline{\omega}_k), \mathrm{Im}\omega_k=\dfrac{1}{2i}(\omega_k-\overline{\omega}_k)$ 构成了上同调群 $H^1(R_g;\mathbb{R})=\underbrace{\mathbb{R}+\cdots+\mathbb{R}}_{2g\text{ 项}}$.

注 任意黎曼曲面 R 的上同调群 $H^1(R;\mathbb{R})$ 由全纯微分形式确定. 但是这些形式的存在性的证明是件不容易的事 (参看 [19]).

习题 1 证明在亏格 g 的黎曼面上任意 $g+1$ 个全纯微分都线性相关.

在同调群 $H_1(R_g,\mathbb{Z})$ 中, 我们选取闭道 $a_i,b_i,i=1,\cdots,g$ 使得它们两两的相交指数有形式 (参看 [1], 卷 II, §15):

$$a_i\circ a_j=b_i\circ b_j=0, a_i\circ b_j=\delta_{ij}, i,j=1,\cdots,g. \tag{4}$$

把曲面 R_g 按这些闭道切开, 然后将其转换成 $4g$ 边形 $\widetilde{R}_g$ (参看 §3).

定义任意一个闭微分形式对闭道 a_i, b_i 的周期为

$$\oint_{a_i} \omega = A_i, \quad \oint_{b_i} \omega = B_i. \tag{5}$$

设 ω' 为另一个闭微分, A_i', B_i' 分别为它的 $A-$ 和 $B-$ 周期.

引理 1 有关系式

$$\int_{R_g} \omega \wedge \omega' = \sum_{i=1}^{g} (A_i B_i' - B_i A_i'). \tag{6}$$

证明 在 $4g$ 边形 $\widetilde{R}_g$ 中, 闭形式 ω 恰当的: $\omega = df$. 于是 $\omega \wedge \omega' = d(f\omega')$, 并且由斯托克斯公式

$$\int_{R_g} \omega \wedge \omega' = \int_{\partial \tilde{R}_g} f\omega.$$

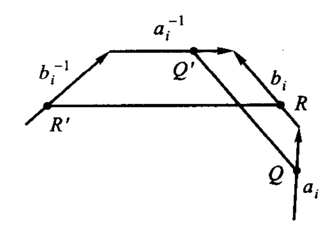


图 46

设 Q 和 Q' 分别为 $4g$ 边形 $\widetilde{R}_g$ 的边 a_i 和 a_i^{-1} 上的点, 它们对应于曲面 R_g 中同一个点. 于是线段 QQ' 为曲面 R_g 上的闭道, 它同调于闭道 b_i (见图 46), 所以我们有

$$\int_{QQ'} \omega = f(Q') - f(Q) = \int_{b_i} \omega = B_i.$$

类似地, 对于连接边 b_i, b_i^{-1} 上的点 R 和 R', 我们得到

$$f(R') - f(R) = -A_i.$$

由此得到了等式

$$\begin{aligned}\int\limits_{a_i+b_i+a_i^{-1}+b_i^{-1}} f\omega' &= \int_{a_i} f\omega' + \int_{b_i} f\omega' - \int_{a_i} (f+B_i)\omega' - \int_{b_i} (f-A_i)\omega' \\ &= A_i B_i' - B_i A_i',\end{aligned}$$

因而引理得证. □

定理 1 对于全纯微分 ω, ω' 的相应周期 (A_i, B_i) 和 (A_i', B_i') 满足下列关系 (**黎曼双线性关系**):

$$\sum_{k=1}^{g} (A_k B_k' - B_k A_k') = 0, \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{g} (A_k \overline{B}_k - B_k \overline{A}_k) > 0, \tag{8}$$

其中的微分 ω 不为零.

证明 如果 (局部地)$\omega = f(z)dz, \omega' = g(z)dz$ 为全纯微分, 于是 $\omega \wedge \omega' = fgdz \wedge dz = 0$. 故由引理有

$$\sum_{k=1}^{g}(A_k B_k' - B_k A_k') = 0.$$

第一个关系式得证.

现在考虑积分 $-\frac{1}{2i}\int_{R_g}\omega\wedge\overline{\omega}$. 因为 $\omega\wedge\overline{\omega} = -2i|f|^2 dx\wedge dy$, 其中 $\omega = f(z)dz$; 这个积分在 $\omega \neq 0$ 时为正. 于是在引理中改变为 $\omega' = \overline{\omega}$ 的情形时得到

$$0 < -\frac{1}{2i}\int_{R_g}\omega\wedge\overline{\omega} = \int_{R_g}|f|^2 dx\wedge dy = \frac{1}{2i}\sum\left(A_k\overline{B}_k - B_k\overline{A}_k\right).$$

定理证完. □

设 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 为在超椭圆黎曼面 R_g 上的全纯微分基. 又设

$$A_{ij} = \oint_{a_j}\omega_i, \quad i, j = 1, \cdots, g. \tag{9}$$

由上面定理的证明得到

推论 1 矩阵 (A_{ij}) 非异.

证明 由公式 (8) 知, 具有零 $A-$ 周期的全纯微分恒等于零. 如果矩阵 (A_{ij}) 退化, 则可以构造一个具有零周期的非零全纯微分. 矛盾. 推论得证. □

由推论 1, 可选取一组新基

$$\varphi_k = \frac{c_{1k}z^{g-1} + \cdots c_{gk}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}}dz = \sum_{i=1}^{g}c_{ik}\omega_{g-i+1}, \quad k = 1, \cdots, g, \tag{10}$$

使得它们的 $A-$ 周期为

$$\oint_{a_j}\varphi_i = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{11}$$

令 $B_{ij} = \int_{b_j}\varphi_i$ 为按这组基构造的 $B-$ 周期矩阵. 由定理 1 得到

推论 2 矩阵 (B_{ij}) 对称, 并有正定的虚部.

证明 令 $\omega = \varphi_i, \omega' = \varphi_j$, 则由 (7) 得到矩阵 (B_{ij}) 的对称性. 现应用不等式 (8) 于全纯微分 $\omega = x_1\varphi_1 + \cdots + x_g\varphi_g$, 其中 x_k 为实数. 对此微分, 其周期 $A_k = x_k$, 周期 $B_k = x_1B_{1k} + \cdots + x_gB_{gk}$. 由此得不等式

$$\begin{aligned}0 &< \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g}[x_k(\overline{x_1B_{1k} + \cdots + x_gB_{gk}}) - x_k(x_1B_{1k} + \cdots + x_gB_{gk})] \\ &= \sum_{k,j=1}^{g}x_jx_k\mathrm{Im}B_{jk}.\end{aligned}$$

这证明了矩阵 $(\mathrm{Im}B_{jk})$ 的正定性. 推论得证. □

按矩阵 (B_{ij}) 我们构造空间 $\mathbb{C}^n$ 中的整数格 Γ, 它由线性无关向量 $e_1, \cdots, e_{2g}$ 生成, 其中 $(e_k)^i = \delta_{ik}, (e_{g+k})^i = B_{ik}, k = 1, 2, \cdots, g$.

格 Γ 定义了一个 $2g$ 维的环面 $T^{2g} = \mathbb{C}^g/\Gamma$ (参看 [1], 卷 Ⅱ, §4), 称其为黎曼面 R_g 的**雅可比环面** (或**雅可比流形**)

结论 *雅可比环面是阿贝尔簇.* (参看 [**1**], 卷 Ⅱ, §4).

当作一个例子, 我们来分析亏格为 1 的曲面情形, 即 "椭圆曲线": $w^2 = P_3(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$. 这时存在两个闭链 a_1, b_1 (参看图 47).

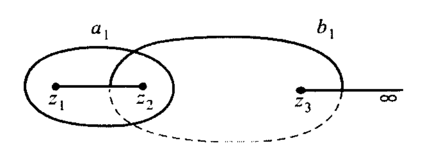


图 47 椭圆黎曼面 $R_1: w^2 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ 上的闭道. 其中的虚线表示闭道 b_1 在第二页上的部分

这里存在一个全纯微分 $\varphi = cdz/\sqrt{P_3(z)}$, 其中的数 c 由条件 $\oint_{a_1}\varphi = 1$ 选定. 令 $\tau = B_{11} = \int_{b_1}\varphi$, 其中 $\mathrm{Im}t > 0$. 向量 $1, \tau$ 定义了黎曼面 R_1 的二维雅可比环面 T^2 这个曲面本身作为流形等价于这个环面 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §4).

所提到的这个等价性是这样建立的: 在曲面 R_1 上固定一个点 P_0. 对 R_1 上任意一个点 P, 定义一个量 $A(P)$ 为

$$A(P) = \int_{P_0}^{P}\varphi = \int_{P_0}^{P}\frac{cdz}{\sqrt{P_3(z)}}. \tag{12}$$

在此黎曼面上从点 P_0 到点 P 所引的积分路径不是唯一确定的, 相差一条任意的闭道. 因此量 $A(P)$ 只确定到微分 φ 的 $A-$ 和 $B-$ 周期的线性组合:

$$A(P) \sim A(P) + n\cdot 1 + m\cdot\tau, \quad m, n \text{ 为整数}. \tag{13}$$

因此, 定义了从椭圆黎曼面 R_1 到它的雅可比环面 T^2 的一个映射 $A(P)$.

命题 1 映射 $A(P)$ 处处正则, 即其微分处处非零.

证明 显然. □

推论 映射 $A(P)$ 是个 (复解析) 同构.

证明 由前面的命题知 $A(P)$ 是个覆叠映射. 显然, $A(P)$ 将群 $\pi_1(R_1)$ 的生成元 a_1, b_1 变为群 $\pi_1(T^2)$ 的生成元. 所以覆叠 $A(P)$ 为平凡 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §19). 推论证完. □

注 在复分析理论中证明了任意的复环面 T^2 都是一个椭圆黎曼面的雅可比环面.

对于 $g>1$ 的超椭圆曲面 R_g 的情形, 对曲面 R_g 的任意点组 $Q_1,\cdots,Q_g$, 定义向量 $A(Q_1,\cdots,Q_g)=(A^1,\cdots,A^g)$, 其中

$$A^k(Q_1,\cdots,Q_g)=\int_{Q_0}^{Q_1}\varphi_k+\cdots+\int_{Q_0}^{Q_g}\varphi_k, k=1,\cdots,g. \tag{14}$$

这里的 $\varphi_1,\cdots,\varphi_g$ 为标准的全纯微分的基, 以条件 $\int_{a_i}\varphi_k=\delta_{ik}$ 法化. 从固定点 Q_0 到点 $Q_1,\cdots,Q_g$ 的积分路径被适当地选取. 这些路径只确定到差一个闭道的整系数线性组合:

$$Q_0Q_k\sim Q_0Q_k+\sum_{i=1}^{g}m_ia_i+\sum_{j=1}^{g}n_jb_j. \tag{15}$$

因此量 $A^k(Q_1,\cdots,Q_g)$ 确定到相差一个全纯微分的周期:

$$A^k(Q_1,\cdots,Q_g)\sim A^k(Q_1,\cdots,Q_g)+\sum_i m_i\delta_{ik}+\sum_j n_jB_{kj}, \tag{16}$$

或者

$$A(Q_1,\cdots,Q_g)\sim A(Q_1,\cdots,Q_g)+\sum_{i=1}^{g}m_ie_i+\sum_{j=1}^{g}n_je_{g+j}, \tag{17}$$

其中 $e_1,\cdots,e_{2g}$ 为上面所构造的格 Γ 的生成元. 所以向量值函数 $A(Q_1,\cdots,Q_g)$ 在黎曼面 R_g 的雅可比环面 $T^{2g}=\mathbb{C}^g/\Gamma$ 上取值. 称这个映射为阿贝尔映射.

命题 2　如果点 $Q_1,\cdots,Q_g$ 中没有重合的, 则阿贝尔映射是 (局部) 可逆的.

证明　为使计算简化, 不妨设在点 $Q_1,\cdots,Q_g$ 中没有分歧点. 于是在点 Q_k 的一个邻域内可以取坐标 $z=z_k$ 为局部参数. 我们来计算变换 $A(Q_1,\cdots,Q_g)$ 的雅可比, 即 $\det(\partial A^j(Q_1,\cdots,Q_g)/\partial z_k)$. 为使计算更方便, 引入基 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ (公式 (1)). 我们有

$$\frac{\partial A^j}{\partial z_k}=\frac{z_k^{j-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z_k)}},\quad j,k=1,\cdots,g.$$

由此得到想要的雅可比

$$\det\left(\frac{\partial A^j}{\partial z_k}\right)=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{g}\sqrt{P_{2g+1}(z_k)}}\det\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ & \cdots & \\ z_1^{g-1} & \cdots & z_g^{g-1}\end{vmatrix}$$
$$=\frac{\prod\limits_{i<j}(z_i-z_j)}{\prod\limits_{k=1}^{g}\sqrt{P_{2g+1}(z_k)}}.$$

(我们在此利用了代数中众所周知的 "范德蒙德行列式" 的表达式). 如果数 $z_1,\cdots,z_g$ 两两不同则此雅可比不为零. 命题证完. □

注 阿贝尔映射的逆问题在黎曼面几何中以 "雅可比逆问题" 而知名. 这个问题有一个显式解: 任意在点 $Q_1, \cdots, Q_g$ 的坐标 $z_1, \cdots, z_g$ 的对称函数可以通过由 (阿贝尔) 雅可比环面 T^{2g} 构造出的雅可比－黎曼 θ 函数 (参看 [1], 卷 II, §4) 表出. 在这里我们不写出一般的公式, 只对点 $Q_1, \cdots, Q_g$ 的坐标和 $z_1 + \cdots + z_g$ 的计算给出公式:

$$z_1 + \cdots + z_g = \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta(y_1, \cdots, y_g) + c \tag{18}$$

其中算子 $\frac{d}{dx}$ 为

$$\frac{d}{dx} = V_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + V_g \frac{\partial}{\partial y_g}, \tag{19}$$

这里

$$V_k = c_{1k}, \quad k = 1, \cdots, g \tag{20}$$

(c_{ik} 由公式 (10) 定义), c 为常数.

点 $Q_1, \cdots, Q_g$ 由方程 $A(Q_1, \cdots, Q_g) = y$ 在差一个置换下被唯一确定.

我们将阿贝尔变换应用到对柯瓦列芙斯卡娅 (Кова-иевскоя) 方程的积分上, 这是关于刚体绕定点的运动方程. 柯瓦列夫斯卡娅问题的方程是 (参看 [31])

$$\begin{aligned} &2\dot{r} = qr, && \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ &2\dot{q} = -pr - \mu\gamma_3, && \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ &\dot{r} = \mu\gamma_2, && \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \\ &\mu = \text{常数}. \end{aligned} \tag{21}$$

可以把这个方程写成哈密顿形式 (参看最后面的应用 1). 这些方程有如下的积分:

$$H = 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2\mu\gamma_1 \quad (\text{能量}), \tag{22}$$

$$L = 2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 \quad (\text{动量}), \tag{23}$$

$$K = (p^2 - q^2 + \mu\gamma_1)^2 + (2pq + \mu\gamma_2)^2 (\text{柯瓦列芙斯卡娅积分}). \tag{24}$$

另外还满足一个关联条件 $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

我们考虑这些积分的联立水平曲面: $H = 6h, L = 2l, K = k^2$, 其中 h, l, k^2 为常数.

在满足关联条件 $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ 时, 方程 (22)—(24) 给出了一个二维曲面 (动力体系 (21) 的不变流形).

在这个曲面上引进坐标 s_1, s_2 (柯瓦列芙斯卡娅变量) 为

$$s_{1,2} = 3h + \frac{R(x_1, x_2) \mp \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2},$$

其中 $x_{1,2}=p\pm iq, R(z)=-z^4+6hz^2+4\mu lz+\mu^2-k^2$,

$$R(x_1,x_2)=-x_1^2x_2^2+6hx_1x_2+2\mu l(x_1+x_2)+\mu^2-k^2.$$

习题 2 证明在变量 s_1,s_2 下, 方程 (21) 可以写为

$$\dot{s}_1=\pm\frac{i\sqrt{\Phi(s_1)}}{2(s_1-s_2)},\quad \dot{s}_2=\mp\frac{i\sqrt{\Phi(s_2)}}{2(s_1-s_2)},\tag{25}$$

其中 $\Phi(z)$ 为 5 次多项式, 其形式为

$$\Phi(z)=\{z[(z-3h)^2+\mu^2-k^2]-2\mu^2l^2\}(z-3h-k)(z-3h+k).\tag{26}$$

注 方程 (25) 与在 [1], 卷 II, §30 中提到的在两个积分的水平曲面上的交换性方程相同.

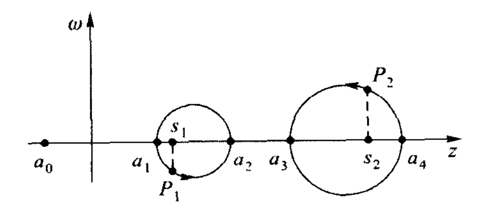


图 48

方程组 (25) 的右端是定义在一个超椭圆黎曼面上的单值函数, 这个黎曼面由方程 $w^2=\Phi(z)$ 给出, 亏格为 2. 于是得到了一对点 (P_1,P_2) 在这个黎曼面上的运动.

譬如, 设多项式 $\Phi(z)$ 所有的根都是实的, 且互不相同. 以 $a_0<a_1<a_2<a_3<a_4$ 表示它们. 如果对方程组 (25) 选取初始值为实的, 并满足 $a_1\leqslant s_1\leqslant a_2, a_3\leqslant s_2\leqslant a_4$, 则在任意时刻 $t, s_i(t)$ 也是实的, 并满足同样的不等式. 点 $P_1=P_1(t), P_2=P_2(t)$ 在黎曼面上依落在线段 $[a_1,a_2]$ 和 $[a_3,a_4]$ 上的闭道运动 (参看图 48). 这些闭道由两个相似的段 $[a_1,a_2]^+$ 和 $[a_1,a_2]^-$, $[a_3,a_4]^+$ 和 $[a_3,a_4]^-$ 按线段的相应端点粘合而成."相点" (P_1,P_2) 按 2 维 (实) 环面运动. 为了对方程 (25) 积分, 我们将对它们应用由方程 $w^2=\Phi(z)$ 给出的亏格 2 超椭圆曲线构造的阿贝尔变换. 这时有两个独立的全纯微分 $\dfrac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}$ 和 $\dfrac{zdz}{\sqrt{\Phi(z)}}$. 令

$$\begin{aligned}A^1(P_1,P_2)&=\int_{P_0}^{P_1}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}+\int_{P_0}^{P_2}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}},\\A^2(P_1,P_2)&=\int_{P_0}^{P_1}\frac{zdz}{\sqrt{\Phi(z)}}+\int_{P_0}^{P_2}\frac{zdz}{\sqrt{\Phi(z)}}\end{aligned}\tag{27}$$

(P_0 为此黎曼面上任一个固定点).

命题 3 在变换 (27) 之后, 柯瓦列芙斯卡娅方程 (25) 转换成了常系数的线性微分方程组:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A^1(P_1(t),P_2(t))&=0,\\ \frac{d}{dt}A^2(P_1(t),P_2(t))&=\frac{i}{2}.\end{aligned}\tag{28}$$

证明 我们假设点 $P_1(t),P_2(t)$ 不同于分歧点 $a_0,\cdots,a_4$. 于是在这些点的邻域中的局部参数为 s_1,s_2. 因此由方程 (25) 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A^1(P_1(t),P_2(t))&=\frac{\dot{s}_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}}+\frac{\dot{s}_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}}\\ &=\frac{i}{2}\frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{(s_1-s_2)\sqrt{\Phi(s_1)}}-\frac{i}{2}\frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{(s_1-s_2)\sqrt{\Phi(s_2)}}=0,\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}A^2(P_1(t),P_2(t))=\frac{\dot{s}_1s_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}}+\frac{\dot{s}_2s_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}}=\frac{i}{2}.$$

命题得证. □

习题 3 证明方程组

$$\frac{ds_1}{dt}=\frac{s_2\sqrt{\Phi(s_1)}}{s_1-s_2},\quad \frac{ds_2}{dt}=\frac{s_1\sqrt{\Phi(s_2)}}{s_2-s_1}\tag{29}$$

在阿贝尔变换下也转换为常系数方程组.

由命题 3 我们有

$$\begin{aligned}A^1(P_1(t),P_2(t))&=A^1(P_1(t_0),P_2(t_0)),\\ A^2(P_1(t),P_2(t))&=A^2(P_1(t_0),P_2(t_0))+\frac{i}{2}(t-t_0).\end{aligned}\tag{30}$$

因此, 在变换到雅可比流形上后, 柯瓦列芙斯卡娅方程组便是完全可解的. 为了得到变量 s_1,s_2 对于时间 t 的显式依赖性, 需要反转变量变换 (27), 即解雅可比逆问题.

结论 柯瓦列芙斯卡娅问题的不变流形 $\{H=6h,L=2l,K=k^2,\gamma^2=1\}$ 是 (在开拓到复区域下) 黎曼曲面 $\{w^2=\Phi(z)\}$ 的雅可比环面.

我们现在举另一些哈密顿系统的例子, 它们可以用阿贝尔变换进行积分, 即这样的系统, 当开拓到复区域时, 它的不变流形就是黎曼面的雅可比环面.

例 1 回忆 [1], 卷 II, §30 中有 “**交换性方程**”

$$[\mathcal{L},A_2+c_1A_1+c_2A_2]=0,\tag{31}$$

其中 $\mathcal{L}=-d^2/dx^2+u(x)$ 为施图姆–刘维尔 (Sturm – Liouville) 算子, A_0, A_1, A_2 是关于 x 的微分算子, 其阶分别为 1,3 和 5, c_1 和 c_2 为常数.

它可以写为拉格朗日形式

$$\frac{\delta L}{\delta u(x)}=0, \tag{32}$$

这里拉格朗日为

$$L=L(u,u',u'')=\frac{u''^2}{2}-\frac{5}{2}u''u^2+\frac{5}{2}u^4+c_1\left(\frac{u'^2}{2}+u^3\right)+c_2u^2+c_3u, c_3\text{为常数}. \tag{33}$$

系统 (32) 的解是算子 $\mathcal{L}$ 的有限间断 (双间断) 的周期和殆周期的位势 (参看 [1], 卷 II, §3). 相对应的具两个自由度的哈密顿系统有了两个独立的对合的积分 J_1, J_2, 即为完全可积的. 在这些积分的水平曲面上的雅可比坐标 γ_1, γ_2 的形式 (在 $c_1=0$ 的情形) 为

$$\begin{aligned} &u=-2(\gamma_1-\gamma_2)\\ &\frac{1}{8}(3u^2-u'')=\gamma_1\gamma_2-\frac{1}{2}\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j, \end{aligned} \tag{34}$$

其中 $\lambda_0,\cdots,\lambda_4$ 为多项式 $P_5(\lambda)=0$ 的根; 多项式 $P_5(\lambda)$ 的系数可通过常数 c_1, c_2, c_3 和积分 J_1, J_2 表出, 其表达式已在 [1], 卷 II 的公式 (30.30) 给出. 在这些坐标下, 方程 (32) 可以在变换 $s_i\to\gamma_i, t\to x$ 后写为与 (25) 相同的样子 ([**1**], 卷 II, 方程 (30, 33)), 从而也可借助于阿贝尔变换进行积分 (现在的情形是由多项式 $P_5(\lambda)$ 给出的亏格 2 的黎曼面的阿贝尔变换).

还应注意, 公式 (29) 描述了 KdV 方程的解 $u(x,t)$ 对时间的依赖性 (参看 [1], 卷 II, §30), 其中作了变换 $s_i\to\gamma_i$ (请验证!)

注　高阶交换性方程也可借助于阿贝尔变换进行积分, 因而有 (在复区域中的) 不变流形, 即高亏格超椭圆黎曼面的雅可比环面.

例 2　在关于二维球面上粒子运动的诺伊曼 (Neumann) 问题中, 球面为

$$x^2\equiv\sum_{i=0}^{2}x_i^2=1, \tag{35}$$

变到平方位势

$$U(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}a_ix_i^2,\quad a_i=\text{常数}, \tag{36}$$

的作用, 其运动方程为

$$\ddot{x}_i=-a_ix_i+\lambda(t)x_i,\quad i=0,1,2, \tag{37}$$

$$x^2 = \sum_{i=0}^{2} x_i^2 = 1, \tag{37'}$$

其中 $\lambda(t)$ 为拉格朗日乘子, 这是由约束条件 (35) 产生的. 系统 (37), (37′) 可以由 $\mathbb{R}^6$ 中的一个哈密顿流得到, 其哈密顿为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} a_i x_i^2 + \frac{1}{2}(x^2y^2 - (xy)^2) \tag{38}$$

在球面 $x^2 = 1$ 上的限制.

习题 4 证明函数

$$F_k(x,y) = x_k^2 + \sum_{i\neq k} \frac{(x_k y_i - x_i y_k)}{a_i - a_k}, \quad k = 0,1,2. \tag{39}$$

是哈密顿系统 (38) 的对合的独立积分组.

哈密顿 H 有形式

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} a_i F_i. \tag{40}$$

习题 5 验证变换

$$x' = y, y' = -x, H' = \sum_{i=0}^{2} a_i^{-1} F_i \tag{41}$$

把上面所构造的哈密顿流转换为在三轴椭球体上的测地流 ("雅可比问题")

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \tag{42}$$

(雅可比得到的在三轴椭球体上的测地线).

我们将证明, 诺伊曼问题 (因而雅可比问题) 可用阿贝尔变换进行积分. 我们把诺伊曼问题按照现代在这方面的工作, 化到已经分析过的关于双间断位势的问题 ("交换性方程"(32)) 上.

设 ψ_0, ψ_1, ψ_2 为算子 $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 + u(x)$ 的特征函数, 其相应特征值为 a_0, a_1, a_2, 即微分方程

$$\mathcal{L}\psi_i = a_i\psi_i, \quad i = 0,1,2 \tag{43}$$

的解. 这个方程可以改写为

$$\psi_i'' = a_i\psi_i + u(x)\psi_i, \quad i = 0,1,2, \tag{44}$$

它与在变换 $x \to t, \psi_i \to x_i, u(x) \to \lambda(t)$ 后的诺伊曼问题的方程 (37) 相同. 但还要满足约束方程 $\sum x_i^2 = 1$. 为此, 选取位势 $u(x)$ 为双间断, 同时使相应多项式 $P_5(\lambda)$ 的零点 $\lambda_0, \cdots, \lambda_4$ (见前面的有关叙述) 有形式

$$\lambda_0 = a_0 < \lambda_1 < \lambda_2 = a_1 < \lambda_3 < \lambda_4 = a_2,$$

$$P_5(\lambda) = \prod_{i=0}^{4}(\lambda - \lambda_i) \tag{45}$$

(在算子 $\mathcal{L}$ 的谱中 "间断的右端", 参看 [1], 卷 II, §30). 最后表明, 我们所需要的方程 (43) 的解可以用等式 (34) 定义的变量 γ_1, γ_2 简单地表达.

习题 6 证明形如

$$\psi_i(x) = \alpha_i \sqrt{(a_i - \gamma_1(x))(a_i - \gamma_2(x))}, \quad i = 0, 1, 2, \tag{46}$$

其中 α_i 为常数, 它们在 $u = -2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sum\limits_{i=0}^{4} \lambda_i$,

$$\gamma_1' = \frac{2i\sqrt{P_5(\gamma_1)}}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad \gamma_2' = \frac{2i\sqrt{P_5(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

时, 满足方程 (43).

习题 7 证明, 如果选取形如

$$\alpha_i = \left[\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 0, 1, 2, \tag{47}$$

的常数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, 则形如 (46) 的函数 ψ_i 满足约束条件

$$\psi_0^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 \equiv 1. \tag{48}$$

公式 (46),(47) 把诺伊曼问题 (也意味着雅可比问题) 完全化到了对有分歧点 (45) 的亏格 2 的黎曼面的雅可比逆问题.

一个有趣的注解: 尽管对于双间断位势的方程 (32) 和对于诺伊曼和雅可比问题的不变环面和它们上面的流 (甚至在复区域中!) 完全相同, 但是所有这三个哈密顿系统并不是典则等价的 (请验证!)

我们对于具两个自由度的诺伊曼和雅可比系统的详细分析几乎可以自动地改写为对高维的情形. 这些系统的积分也总能被转移到有限间断的位势情形.

§13. 凯勒流形的最简单性质. 阿贝尔环面

定义 1 具埃尔米特度量 $ds^2 = g_{\alpha\beta}dz^\alpha d\bar{z}^\beta (\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\beta\alpha})$ 的复流形 M^{2n} 称做凯勒(Kähler)流形是说, 相应的实 2− 形式 $\Omega = \dfrac{i}{2}\sum\limits_{\alpha<\beta} g_{\alpha\beta}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ 为闭: $d\Omega = 0$.

有如后的论断 (参看 [1], 卷 I, §27): 对于凯勒度量, 形式 $\Omega^n = \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$($n$ 个因子) 为体积元的非零倍数:

$$\Omega^n = cdV = c\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n, c \neq 0. \tag{1}$$

推论 在紧凯勒流形上, 形式 $\Omega^i, i = 1, \cdots, n$, 不上同调于零. 因此群 $H^{2i}(M^{2n}, \mathbb{R})$ 非平凡.

证明 如果 Ω 为恰当形式: $\Omega = d\omega$, 则 Ω^n 也为恰当: $\Omega^n = d(\omega \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega)$. 然而在紧流形上有

$$\int_{M^{2n}} \Omega^n = c\int_{M^{2n}} dV \neq 0.$$

这表明形式 Ω 不可能是恰当的. 推论得证. □

例 1 任意黎曼面都是凯勒流形, 这只要考虑到维数即知.

例 2 $\mathbb{C}P^n$ 上的埃尔米特度量由空间 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的形式

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{n} dz^k d\bar{z}^k - \left(\sum_{k=0}^{n} z^k d\bar{z}^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \bar{z}^j dz^j\right) \tag{2}$$

得到; 这时可将它看作在球面 $S^{2n+1}: |z^0|^2 + \cdots + |z^n|^2 = 1$ 上的形式. 我们验证这个形式对于变换

$$z^k \mapsto \mathrm{e}^{i\varphi}z^k, \quad \bar{z} \mapsto \mathrm{e}^{-i\varphi}\bar{z}^k$$

不变. 在这个变换下, 我们有

$$dz^k \mapsto \mathrm{e}^{i\varphi}(dz^k + iz^k d\varphi),$$
$$d\bar{z}^k \mapsto \mathrm{e}^{-i\varphi}(d\bar{z}^k - i\bar{z}^k d\varphi),$$

因此

$$\sum_k dz^k d\bar{z}^k \mapsto \sum_k dz^k d\bar{z}^k + i\left(\sum_k (z^k d\bar{z}^k - \bar{z}^k dz^k)\right) d\varphi + d\varphi^2,$$
$$\sum_k z^k d\bar{z}^k \mapsto \sum_k z^k d\bar{z}^k - id\varphi,$$
$$\sum_j \bar{z}^j dz^j \mapsto \sum_j \bar{z}^j dz^j + id\varphi.$$

故

$$\sum_k dz^k d\bar{z}^k - \left(\sum_k z^k d\bar{z}^k\right)\left(\sum_j \bar{z}^j dz^j\right)$$
$$\mapsto \sum_k dz^k d\bar{z}^k - \left(\sum_k z^k d\bar{z}^k\right)\left(\sum_j \bar{z}^j dz^j\right).$$

那么形式 ds^2 便可以看成是 $\mathbb{C}P^n$ 上的度量. 所定义的这个度量的相应形式 Ω 为

$$\Omega = \frac{i}{2}\sum dz^k \wedge d\bar{z}^k - \frac{i}{2}\left(\sum z^k d\bar{z}^k\right) \wedge \left(\sum \bar{z}^k dz^k\right). \tag{3}$$

在球面 S^{2n+1} 上有 $\sum z^k\bar{z}^k = 1$, 由此有 $\sum z^k d\bar{z}^k + \sum \bar{z}^k dz^k = 0$. 因此形式 Ω 在此球面上的限制给出了

$$\Omega = \frac{i}{2}\sum dz^k \wedge d\bar{z}^k. \tag{4}$$

这个形式是闭的 (在 §1 中讨论空间 $\mathbb{C}P^n$ 的上同调环时已考虑过), 故而流形 $\mathbb{C}P^n$ 是凯勒流形.

例 3 现在举个不具有凯勒结构的紧复流形的例子, 即霍普夫流形. 以 Γ 表示作用在空间 $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 的群, 它由变换 $z \mapsto 2z$ 生成. 显然, 在这个作用下的商空间 $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\Gamma$ 为一个紧复流形, 同胚于直积 $S^1 \times S^{2n-1}$. 于是 $H^2(S^1 \times S^{2n-1}; \mathbb{R}) = 0 (n > 1)$, 故而在此时, 当 $n > 1$ 时不可能在这个流形上引进凯勒结构.

在凯勒流形上可定义形式 Ω 的周期, 即它在 $H_2(M^{2n}, \mathbb{Z})$ 中的闭链上的积分. 如果 Ω 的所有周期都是整数 (或者在乘以同一数 $\Omega \to \lambda\Omega$ 后变为整数), 则称此流形 M^{2n} 为*霍奇*(Hodge)*流形*.

例如, 对于流形 $\mathbb{C}P^n$, 我们知道 $H_2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, 故可乘度量 ds^2 以适当的数, 使得形式 Ω 的唯一的周期变为整数.

习题 1 群 $H_2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ 中的生成元为子流形 $\mathbb{C}P^1$, 它由 $\mathbb{C}P^n$ 中的方程 $z^2 = \cdots, z^n = 0$ 给出. 计算形式 $\Omega = \frac{i}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} dz^k \wedge d\bar{z}^k$ 在这个闭链上的唯一的周期 (法化因子).

命题 1 凯勒流形 M^{2n} 的复解析子流形 N^{2m} 仍是凯勒的. 如果 M^{2n} 是霍奇流形, 则 N^{2m} 也是.

证明 设 $f: N^{2m} \to M^{2n}$ 为包含映射, ds^2 为其埃尔米特度量, 它在 M^{2n} 上给出了凯勒结构, 与它关联的 Ω 为闭形式. 于是 ds^2 诱导了 N^{2m} 上的埃尔米特度量 f^*ds^2, 而与其关联的形式为 $f^*\Omega$, 从而为闭. 于是流形 N^{2m} 为凯勒流形. 如果 c 为 N^{2m} 的任一个 2 维闭链, 则成立等式

$$\int_c f^*\Omega = \int_{f_*c} \Omega.$$

对于整闭链 c, 闭链 f_*c 也为整的, 故而 $\int_{f_*c} \Omega$ 对于霍奇流形 M^{2n} 也是整数. 由此得到 N^{2m} 的霍奇结构. 命题得证. □

在流形 $\mathbb{C}P^n$ 中有一种紧复的代数子流形. 这种流形的一个最简单的类是由一组方程 (“完全交”)

$$\left.\begin{array}{l} F_1(z_0,\cdots,z_n)=0, \\ \cdots\cdots \\ F_k(z_0,\cdots,z_n)=0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

给出的, 其中所有函数 $F_1,\cdots,F_k$ 为齐次多项式:

$$F_i(cz_0,\cdots,cz_n)=c^\alpha F_i(z_0,\cdots,z_n).$$

推论 $\mathbb{C}P^n$ 中所有非异复子流形都是霍奇流形.

注 每个这样的子流形定义了闭链 $N^{2m}\subset\mathbb{C}P^n$. 对于紧代数子流形而言, 这个闭链不上同调于零. 事实上, 设 $f:N^{2m}\to\mathbb{C}P^m$ 为包含映射; Ω 为 $\mathbb{C}P^n$ 上的标准形式. 于是 $f^*\Omega$ 为 N^{2m} 上的 2− 形式, 它对应诱导的凯勒度量. 因此 $(f^*\Omega)^m$ 是 N^{2m} 上体积元的非零倍. 由于紧性, 便有

$$\int_{N^{2m}}(f^*\Omega)^m\neq 0,$$

由此得到 $\int_{f_*N^{2m}}\Omega^m\neq 0$. 因为形式 Ω^m 为闭, 而且由斯托克斯公式, 它在任意边缘链上积分为零, 所以闭链 f_*N^{2m} 不是 $\mathbb{C}P^n$ 中的边缘.

我们现在来分析一下复环面 $T^{2n}=\mathbb{C}^n/\Gamma$ 的霍奇性问题, 这里的格 Γ 由 $2n$ 个线性无关的向量 $e_1,\cdots,e_{2n}$ 生成. 如果在 $\mathbb{C}^n$ 上取任意具常系数的埃尔米特度量, 则得到了环面 T^{2n} 上的凯勒度量. 如果在 T^{2n} 上给出任意的凯勒度量, 则可以在环面 T^{2n} 上进行平均化 (积分), 从而得到具常系数的度量.

习题 2 证明, 如果初始的度量是霍奇度量, 则在平均化后我们得到了具有相同周期的霍奇度量 (假定环面 T^{2n} 的体积等于 1).

因此, 只须考虑具常系数的度量情形. 每个这样的度量由某个 $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ 中的埃尔米特内积定义:

$$H(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}h_{\alpha\beta}z_1^\alpha\bar{z}_2^\beta, x=(z_1^\alpha), y=(z_2^\beta), h_{\beta\alpha}=\bar{h}_{\alpha\beta}. \tag{6}$$

$H(x,y)$ 可以看作为在 $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}$ 上的复双线性函数, 它满足关系

$$H(y,x)=\overline{H(x,y)},\quad H(ix,y)=iH(x,y). \tag{7}$$

如果 $H(x,y)=F(x,y)+iG(x,y)$, 其中 $F(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 为实函数, 于是等式 (7) 得到 $F(x,y)=F(y,x), G(x,y)=-G(y,x), F(x,y)=G(ix,y)$. 因此形式 $F(x,y)$ 为正定, 而形式 $H(x,y)$ 由其虚部决定.

命题 2　环面 $T^{2n}=\mathbb{C}^n/\Gamma$ 为霍奇流形当且仅当存在实反称形式 $G(x,y)=-G(y,x)$, 使得

1) 形式 $F(x,y)=G(ix,y)$ 对称且正定;

2) $G(e_\alpha,e_\beta)$ 对格 Γ 的任意两个向量为整数.

称这些条件为**弗罗贝尼乌斯** (Frobenius) **关系式**.

证明　由于前面所进行的讨论, 只要证明条件 2) 等价于环面 T^{2n} 上度量的霍奇性, 这个度量是由埃尔米特形式 $H(x,y)=G(ix,y)+iG(x,y)$ 所定义. 我们知道, 群 $H_2(T^{2n};\mathbb{Z})$ 的秩等于组合数 $C_{2n}^2=n(2n-1)$, 其中 T^{2n} 上的二维闭链基具形式 $c_{\alpha\beta}=\{\lambda e_\alpha+\mu e_\beta\},0\leqslant\lambda,\mu\leqslant 1(\alpha<\beta)$. 形式 G 是相应于凯勒度量的形式, 故而环面 T^{2n} 为霍奇当且仅当形式 G 在全部闭链 $c_{\alpha\beta}$ 上的积分为整数.

形式 G 在闭链 $c_{\alpha\beta}$ 上的限制等于 $G(e_\alpha,e_\beta)d\lambda\wedge d\mu$, 而在这个闭链上积分为 $G(e_\alpha,e_\beta)$. 命题得证. □

在 [**1**], 卷 II, §4 中, 我们曾引进了阿贝尔复环面这个重要类. 如果我们以等式 $e_{n+k}=\sum\limits_{j=1}^{n}B_{kj}e_j,1\leqslant k\leqslant n$ 定义矩阵 (B_{kj}), 则对于阿贝尔环面, 矩阵 (B_{kj}) 应该为对称并有正定的虚部. 特别, 在前一节曾证明, 黎曼面的雅可比环面是阿贝尔的.

命题 3　任意的阿贝尔环面是霍奇的.

证明　我们以等式

$$H(x,y)=\beta_{kj}z_1^k\bar{z}_2^j,x=(z_1^1,\cdots,z_1^n),\quad y=(z_2^1,\cdots,z_2^n).\tag{8}$$

给出了埃尔米特形式. 这里的矩阵 (β_{kj}), 它是正定矩阵 $\mathrm{Im}B$ 的逆. 由矩阵 (β_{kj}) 的对称性, 形式 $H(x,y)$ 的虚部为

$$G(x,y)=\mathrm{Im}H(x,y)=\frac{1}{2i}\beta_{kj}(z_1^k\bar{z}_2^j-z_2^j\bar{z}_1^k).\tag{9}$$

我们来验证反称形式 $G(x,y)$ 在格 Γ 的基 $e_1,\cdots,e_{2n}$ 上取整数值. 当 $m,l\leqslant n$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}G(e_m,e_l)&=\frac{1}{2i}\beta_{kj}(\delta_m^k\delta_l^j-\delta_l^j\delta_m^k)\equiv 0,\\G(e_m,e_{n+l})&=\sum_j\frac{1}{2i}\beta_{kj}(\delta_m^k\overline{B}_{lj}-B_{lj}\delta_m^k)\\&=-\delta_m^k\sum_j\beta_{kj}(\mathrm{Im}B)_{jl}=-\delta_m^k\delta_{kl}\\&=-\delta_{ml}=-G(e_{n+l},e_m),\end{aligned}$$

$$G(e_{n+m}, e_{n+l}) = \sum_{k,j} \frac{1}{2i}\beta_{kj}(B_{mk}\overline{B}_{lj} - B_{lj}\overline{B}_{mk})$$
$$= \sum_{k,j} \beta_{kj}(b''_{mk}b'_{lj} - b'_{mk}b''_{lj})$$
$$= b'_{lm} - b'_{ml} = 0,$$

其中所用记号 $b'_{jk} = \mathrm{Re}B_{jk}, b''_{jk} = \mathrm{Im}B_{jk}$. 因此, 形式 $G(x,y)$ 在环面 $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ 上取整值. 显然, 埃尔米特度量 (8) 正定. 命题得证. □

习题 3 证明逆命题成立: 任意霍奇环面为阿贝尔.

最后我们注意到, 霍奇 (或阿贝尔) 环面类的重要性在于, 任意阿贝尔环面可借助于 $\theta-$ 函数来显式地实现, 表示为在复射影空间中的非异代数子流形 (莱夫谢茨 Lefschetz). 这个定理对所有霍奇流形也对 (小平邦彦; Kodaira; 参看 [21]).

§14. 系数在层的同调论

还要描述一种同调论, 它在各种数学领域中都有实质性的意义 (然而这不在本书的内容之中).

设 X 为一个具开区域 U_α 的覆盖的空间, $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = X$.

我们要求开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 为 "局部有限" (即只有有限的开区域 U_α 的组才有非空交).

定义 1 设 F 是一个对应关系, 它对每个区域 $U \subset X$ 指派一个阿贝尔群 (环, 域) F_U; 要求对每个包含 $U \subset V$ 对应于一个 "限制" 同态:

$$i_{UV}: F_V \to F_U. \tag{1}$$

如果 $U \subset V \subset W$, 则 $i_{UW} = i_{UV}i_{VW}$; 我们称这个对应 F 为*预层*.

称预层 F 为*层*是说, 它具有如下性质:

1) 设区域 U 表示为区域 U_α 的并:

$$U = \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

于是, 如果 $i_{U_\alpha U}(f) = 0$, 对所有 α 成立, 则 F_U 中的元素 f 应该为零.

2) 在每点存在一个充分小的邻域 U, 使得每个 "相容" 的元 $f_\alpha \in F_{U_\alpha}$ 的集合是一个整体元 $f \in F_U$ 的限制的集合. 这里的

$$U = \bigcup_\alpha U_\alpha, U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta = U_{\beta\alpha},$$
$$i_{U_{\alpha\beta}U_\beta} f_\beta = i_{U_{\beta\alpha}U_\alpha} f_\alpha \ (\text{“相容性”}),$$
$$i_{U_\alpha U} f = f_\alpha.$$

空集 $\varnothing$ 总对应于零: $F_{\varnothing}=0$.

对每个覆盖伴有一个单纯复形, 称为 "覆盖的神经", 并记为 $N\{U_\alpha\}$:

1) 顶点 σ_α^0 对应区域 U_α;

2) 边 $\sigma_{\alpha\beta}^1$ 对于应区域对 (U_α,U_β), 它们具有非空交, $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$;

3) 三角形 $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$ 对应于区域的三元组 $(U_\alpha,U_\beta,U_\gamma)$, 它们具有非空交, $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma=\varnothing$;

4) 单形 $\sigma_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_k}^k$ 对应于区域组 $(U_{\alpha_0},\cdots,U_{\alpha_k})$, 它们有非空交 $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k}$.

存在一个系数在预层 F 中的 "开覆盖的上同调群": k 维上链是神经 $N\{U_\alpha\}$ 中 k 维单形 $\sigma_{\alpha_0\cdots\alpha_k}^k$ 上取值在群 $F(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k})$ 中的线性函数. 这个上链在每个单形上都取值. 上链 c^k 对应有上边缘

$$(\delta c^k,\sigma_{\alpha_0\cdots\alpha_{k+1}}^{k+1})=\sum_{q=0}^{k+1}(-1)^q i_{UU_q}(c^k,\sigma_{\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_q\cdots\alpha_{k+1}}^k).$$

其中

$$\begin{aligned}&(c^k,\sigma_{\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_q\cdots\alpha_{k+1}}^k)\ \text{属于群}\ F_{U_q},\\&U=U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k+1}},\\&U\subset U_q=U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\widehat{U}_{\alpha_q}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k+1}}\end{aligned}$$

(区域 U_q 从此相交表示中去掉).

称上链对于上边缘的商群

$$H^q(N\{U_\alpha\},F)=\mathrm{Ker}\delta/\mathrm{Im}\delta=Z^q/B^q$$

为此覆盖的上同调.

设覆盖 $\{V_\alpha\}$ "内接" 于 $\{U_\alpha\}$: 如果交 $V_\beta\cap U_\alpha$ 非空则 V_β 整个包含在 U_α 中. 容易证明, 存在这些覆盖的神经之间的单纯映射 (单形映到单形):

$$N\{V_\beta\}\xrightarrow{\varphi_{UV}}N\{U_\alpha\}.$$

于是, 运用 (1) 得到了上链和上同调间的映射:

$$H^*(N\{U_\alpha\},F)\xrightarrow{\varphi_{UV}^*}H^*(N\{V_\beta\},F).$$

所有这种结构 (对于充分 "小" 的覆盖) 描述了系数在层中的上同调 $H^*(X,F)$, 这是对空间 X 的所有开覆盖 (φ_{UV}^*) 的 "正向极限".

所说的 "正向极限" 的元 x 是对所有可能的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和所有可能的元 $x_U\in H^q(N\{U_\alpha\},F)$ 的集合, 其中元素 $x_U\in H^q(N\{U_\alpha\},F)$ 和 $x_W\in$

$H^q(N\{W_\gamma\},F)$ 代表 $H^q(X,F)$ 中同一个元, 当且仅当对某个更小的, 内接于 U 和 W 的开覆盖 V, 有

$$\varphi^*_{UV}x_U=\varphi^*_{WV}x_W=x_V\in H^q(N\{V_\beta\},F).$$

例 1 常值层. 设 $F_U=G$ (阿贝尔群, 对所有 $U\neq 0$ 都对应同一个 G); 映射 i_{UV} 为恒同映射

$$i_{UV}\equiv 1:G\approx G$$

如果 $X=M^n$ 为流形, 其上的一个覆盖满足所有集合 $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k}$ 可缩 (例如 U_α 在 M^n 的度量下为足够小的凸集), 则成立

$$H^*(N\{U_\alpha\},G)=H^*(M^n;G).$$

习题 1 证明在上述情形中的覆盖的神经是个同调等价于 M^n 的复形.

例 2 连续 (函数) 层. 这里的 F_U 是如下一些类的函数环 (线性空间): 在 $U\subset X$ 上的连续、光滑、全纯, 代数等等结构.

习题 2 证明对上述那些函数类 F_U 的函数层, 则 $H^0(X,F)$ 是在整个流形 $X=M^n$ 上整体定义的函数环, 并且 $F_U=H^0(U,F|_U)$.

一般定义 *预层 F 定义的层 $\widetilde{F}$* 是指一个新的预层, 满足 $\widetilde{F}_U=H^0(U,F|_U)$, 其中 U 为任意区域。

例如, 群 $H^1(X,F)$ 出现在这样的问题中: 设给出了函数 f 在区域 U_α 的 "主部" 组 f_α, 其中 $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha=X$. 这里 $X=M^{2n}$ 为复流形. 主部 f_α, 例如可以是未知函数 f 在极点附近的洛朗 (Laurent) 部分. 需要求出 X 上的半纯函数 f 使得函数 $(f-f_\alpha)$ 在区域 U_α 中为全纯. 显然, 必须有 "相容性", 即 $f_\alpha-f_\beta=g_{\alpha\beta}$ 在相交处 $U_\alpha\cap U_\beta$ 为全纯. 请指出这个问题与层的上同调 $H^1(X,F)$ 之间的关系, 其中 $F(U)=H^0(U,F)$ 为区域 U 上的全纯函数的线性空间. 证明, 如果 $H^1(X,F)=0$ 则此问题有解.

例 3 (仍是层的例子) 设 $f:X\to Y$ 为连续映射. 区域 $U\subset Y$ 对应了 $f^{-1}(U)\subset X$. 令

$$F^j_U=H^j(f^{-1}(U)).$$

产生了上同调 $H^q(Y,F^j),j\geqslant 0,q\geqslant 0$. 在最一般的勒雷定理中应以 $H^q(Y,F^j)$ 替换 E_2^{qj}, 那么其余的都成立. 如果 $p:X\to Y$ 为纤维丛的投射, 其中的底空间为胞腔复形, 且为单连通, 我们则有

$$H^q(Y,F^j)=H^q(Y,H^j(\widetilde{F})),$$

其中的 $\widetilde{F}=p^{-1}(y)$ 为纤维 (请证明!).

例 4 在 [1], 卷 II, §25 中, 关于底为 X, 结构群为 G 的纤维丛的分类问题, 从另一种观点看则给出了一个层 (一般说, 是非交换群) 的例子. 设给出了一个纤维丛 $p: E \to X$, 结构群为 G, 纤维为 $\widetilde{F}$. 如果 $\{U_\alpha\}$ 为 X 的覆盖, 满足 $p^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \widetilde{F}$, 则 "胞腔映射" (参看 [1], 卷 II, §24)

$$\lambda_{\alpha\beta}^{-1} = \lambda_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \tag{2}$$

确定了纤维丛的结构. 这时对 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 有

$$\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{\beta\gamma}\lambda_{\gamma\alpha} = 1. \tag{3}$$

方程 (3) 表明, 元组 $(\lambda_{\alpha\beta})$ 为开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 在层 F 中取值的一个一维上闭链, 其中 $F(U_\alpha)$ 为 U_α 上取值于 G 的连续函数. 如果纤维丛为直积, 则 (如有必要, 先进行覆盖的细分) 存在一组函数 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to G$ 使得 $\lambda_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}\varphi_\beta$. 纤维丛的类是 $H^1(X, F)$ 中的元. 但是, 如果 G 不是阿贝尔的, 则 $H^1(X, F)$ 不是一个群.

习题 3 如果 G 是阿贝尔群, 计算 $H^1(X, F)$.

习题 4 证明, 如果 F 是光滑流形上的层, 其中 F_U 是区域 U 上光滑函数的线性空间 (更准确地, 是在闭区域 $\overline{U} \supset U$ 中光滑), 则在 $q > 0$ 时上同调为平凡: $H^q(M^n, F) = 0, H^0(M^n, F) = C^*(M^n)$ 为 M^n 上的光滑函数环. 在复流形上存在全纯函数层, 这时上述结果不再成立.

习题 5 设给定向量丛, 其底为 $B = M^n$, 层 F_U 为这个层在区域 U 上光滑截影. 证明等式 (但在全纯情形这不再相等):

$$H^q(M^n, F) = 0, q > 0,$$

$H^0(M^n, F)$ 为这个层的截影空间.

提示. 利用区域 U 上的光滑函数可延拓到整个流形 M^n 的性质.

习题 6 设 $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)}$ 为三个层, 它们对充分小的球状区域 U 有群的正合序列:

$$0 \to F_U^{(0)} \xrightarrow{\alpha_U} F_U^{(1)} \xrightarrow{\beta_U} F_U^{(2)} \to 0,$$

其中所有 α_U 和 β_U 与映射 $i_{UV} : F_U^{(k)} \to F_V^{(k)}, k = 0, 1, 2$ 交换. 构造 "正合" 的上同调序列

$$\begin{aligned}
0 \to H^0(M^n, F^{(0)}) &\xrightarrow{\alpha} H^0(M^n, F^{(1)}) \xrightarrow{\beta} H^0(M^n, F^{(2)}) \\
\xrightarrow{\delta} H^1(M^n, F^{(0)}) &\xrightarrow{\alpha} H^1(M^n, F^{(1)}) \xrightarrow{\beta} H^1(M^n, F^{(2)}) \\
\xrightarrow{\delta} H^2(M^n, F^{(0)}) &\xrightarrow{\alpha} \cdots .
\end{aligned}$$

例 5 设 $F_U^{(1)}$ 为区域 U 上的光滑实函数, $F_U^{(0)}$ 为常值层 $F_U^{(0)} = \mathbb{Z}, F_U^{(2)}$ 为在 $G = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上取值的函数。计算 $H^1(M^n, F^{(2)})$; 利用上面的习题给出以 $G^1 = S^1$ 为群的纤维丛的分类.

例 6 设 $\widetilde{F}_U^{(1)}$ 是区域 U 上的全纯函数的线性空间. $\widetilde{F}_U^{(0)} = \mathbb{Z}$ 为常层, $\widetilde{F}_U^{(2)}$ 为 U 上非零全纯函数的乘法群. 映射 $\alpha : \mathbb{Z} \to \widetilde{F}_U^{(1)}$ 为常数的包含映射, 映射 $\beta : \widetilde{F}_U^{(1)} \to \widetilde{F}_U^{(2)}$ 为 $f \stackrel{\beta}{\longmapsto} \exp(2\pi i f)$, 将层 $\widetilde{F}^{(2)}$ 写成乘法.

习题 7 证明群 $H^1(M^n, \widetilde{F}^{(2)})$ 给出了全纯线丛的分类 (参看 [1], 卷 II, §25). 如何把群 $H^1(M^n, \widetilde{F}^{(1)})$ 与拓扑等价于 (即没有复结构的) 直积全纯丛的分类?

例 7 按定义, 切向量丛和余切向量丛的各种张量幂的截影称为张量场. 与张量场相关有一个层, 其中 F_U 为在区域 U 上的所有光滑张量场. $U \subset M^n$ 是底空间 M^n 上的区域. 这时, 当取反称张量 (具下指标) 即微分形式时, 我们则定义了层 F^i, 其中 F_U^i 为在区域 $U \subset M^n$ 上的形式. 有 "*层的正合序列*" (即对所有小的球形区域 $U \subset M^n$) :

$$0 \to R \to F^0 \xrightarrow{d} F^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} F^n \to 0. \tag{4}$$

这里的 R 为常值层 (常数), 在任意区域上, 算子 d 把 i 次形式变为 $i+1$ 次形式. 层的序列 (4) 的正合性由定理 1.2 的推论 1 得到, 它断言对充分小的球状区域 U. 每个形式 $\omega, \deg\omega > 0$, 是局部恰当的, 即由 $d\omega > 0, \deg\omega > 0$ 推出 $\omega = d\omega'$. 分离出闭形式的层 $Z_U' \subset F_U'$, 其中 $Z_U' = \mathrm{Ker} d$ (区域 $U \subset M^n$ 上的闭 1− 形式). 按定义, 我们有了层的正合序列

$$0 \to R \to F^{(0)} \xrightarrow{d} Z^1 \to 0.$$

考虑这些层的上同调的正合序列:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^0(M^n, R) & \longrightarrow & H^0(M^n, F^0) & \xrightarrow{d} & H^0(M^n, Z^1) & \to \\ & \| & & \| & & \| & \\ & \boxed{\begin{matrix}\mathbb{R}\\ \text{“常数”}\end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix}C^*(M^n)\\ M^n\text{ 上的函数}\end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix}M^n\text{ 上的}\\ \text{闭 1− 形式}\end{matrix}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\delta} H^1(M^n, R) & \longrightarrow & H^1(M^n, F^0). \\ \| & & \| \\ \boxed{\text{“平常的上同调”}} & & \boxed{0} \end{array}$$

利用前面习题 4 的结果推出了 $H^1(M^n, F^0) = 0$. 因此我们得到了满映射:

$$H^0(M^n; Z^1) \xrightarrow{\delta} H^1(M^n; R) \to 0.$$

映射 δ 的核为 df, f 为光滑函数. 由此最后有

$$H^1(M^n;R) = \mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d = H^0(M^n;Z^1)/(df).$$

(即闭形式相对于恰当形式的类).

把这个讨论更深入一些便可以建立已经得到过的"德拉姆 (de Rham) 定理" (参看 §6): 由微分形式定义的上同调群与单纯上同调群 $H^q(M^n,\mathbb{R})$ 相同, 其中 q 任意. 我们对 $q \leqslant 2$ 进行证明:

a) $F_U^0/R = \overline{F}_U^0$; b) $Z_U^2 = d(F_U^1)$ 为闭的 2– 形式.

我们有两个层的正合列

1) $0 \to R \to F^0 \to F^0/R \to 0$

2) $\partial \to F^0/R \xrightarrow{d} F^1 \to Z^2 \to 0$

由 1) 的上同调正合列并利用上面习题 4 的结果最后得到

i) $H^1(M^n;F^0/R) \cong H^2(M^n;R)$.

由 2) 的上同调正合列, 我们有

ii) $H^0(M^n,Z^2)/(df) \cong H^1(M^n,F^0/R)$.

因为 $H^0(M^n,Z^2)$ 为闭的 2– 形式, 于是最终得到

$$Z^2(M^n)/(df) \cong H^2(M^n;R).$$

第二章
光滑函数的临界点和上同调

§15. 莫尔斯函数与胞腔复形

我们假定在光滑紧流形 M 上给出了一个莫尔斯函数 f (即其所有的临界点为非退化). 我们来讨论水平曲面 $f_c = \{f(x) = c\}$ 和小于一个值的区域 $M_c = \{f(x) \leqslant c\}$ 的结构.

引理 1 (莫尔斯, M. Morse) 设 $f(x)$ 为 M 上的光滑函数, x_0 为 f 的非退化平稳点或临界点. 则在点 x_0 的一个邻域内存在这样的局部坐标 $y^1, \cdots, y^n$, 使得在此坐标下, 可以把 f 写为 $f(y^1, \cdots, y^n) = -(y^1)^2 - \cdots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \cdots + (y^n)^2$. (称数 λ 为这个临界点的指数.)

证明 先对 $n = 2$ 证明此引理 (对大的 n 的讨论完全类似).

由于此引理论断的局部特性, 不妨认为, $f(x_1, x_2)$ 在半径为 $\varepsilon > 0$ 的 $D_\varepsilon^2(0)$ 中给出, $f(0) = 0$, 而其中的 0 为 f 的临界点. 存在光滑函数 g_1, g_2 使得 $f = x^1 g_1 + x^2 g_2; g_i(0) = \dfrac{\partial f(0)}{\partial x^j}$.

事实上, 我们有等式

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = f(1 \cdot x) - f(0 \cdot x) = f(x).$$

进而有

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} x^\alpha dt = x^\alpha \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} dt = x^\alpha g_\alpha(x),$$

其中

$$g_\alpha(x)=\int_0^1\frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha}dt.$$

因为 $\mathrm{grad} f(0)=0$, 显然有 $g_\alpha(0)=0$. 于是存在光滑函数 $h_{\alpha\beta}(x)$ 使得 $g_\alpha(x)=x^\beta h_{\alpha\beta}(x)$. 因此 $f(x)=x^\alpha x^\beta h_{\alpha\beta}(x)$, 其中不妨假定 $h_{\alpha\beta}=h_{\beta\alpha}$. 进而有 $h(0)=(h_{\alpha\beta}(0))$ 等于 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}(0)\right)$. 事实上,

$$\begin{aligned}g_\alpha(x)&=\int_0^1\frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha}dt=x^\beta\int_0^1\frac{\partial g_\alpha(tx)}{\partial x^\beta}dt\\&=x^\beta\int_0^1\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\int_0^1\frac{\partial f(t\tau x)}{\partial x^\alpha}d\tau\right)dt=x^\beta\int_0^1\int_0^1\frac{\partial^2 f(t\tau x)}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}d\tau dt\\&=x^\beta h_{\alpha\beta}(x).\end{aligned}$$

由此

$$h_{\alpha\beta}(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}(0).$$

我们来证明 $n=2$ 时的引理. 在局部坐标 (x^1,x^2) 下函数 f 有形式

$$f=(x^1)^2h_{11}+2x^1x^2h_{12}+(x^2)^2h_{22}.$$

不妨设 $h_{11}(0)\neq 0$. 事实上, 矩阵 $(h_{\alpha\beta}(0))$ 为对称和非退化, 因而用它的坐标线性变换可以化为 (在点 0) 对角形. 因为从一开始我们就可以假定坐标 (x^1,x^2) 使 $(h_{\alpha\beta}(0))$ 为对角形, 所以可以令 $h_{11}(0)\neq 0$. 于是在点 0 的某个邻域中 $h_{11}(x)\neq 0$. 在这个邻域中有

$$\begin{aligned}f(x)&=h_{11}\left((x^1)^2+2x^1x^2\frac{h_{12}}{h_{11}}+(x^2)^2\frac{h_{12}^2}{h_{11}^2}\right)+(x^2)^2\left(h_{22}-\frac{h_{12}^2}{h_{11}}\right)\\&=h_{11}\left(x^1+\frac{h_{12}}{h_{11}}x^2\right)^2+(x^2)^2\left(h_{22}-\frac{h_{12}^2}{h_{11}}\right).\end{aligned}$$

因为 $h_{11}h_{22}-h_{12}^2\neq 0$ 在点 0 的某邻域中成立 (即矩阵 $(h_{\alpha\beta}(0))$ 非退化), 于是在变换

$$y^1=\sqrt{|h_{11}|}\left(x^1+\frac{h_{12}}{h_{11}}x^2\right),\ y^2=\sqrt{\left|h_{22}-\frac{h_{22}^2}{h_{11}}\right|}x^2,$$

下, 得到了

$$\widetilde{f}(y^1,y^2)=\pm(y^1)^2\pm(y^2)^2.$$

因为坐标变换显然是局部非退化的, 故在当前的条件下得证.

现在转而证明对任意 n 的莫尔斯引理.

我们已知上面所引进的矩阵 $(h_{\alpha\beta}(0))$ 是对称的. 将用归纳进行证明. 设函数 f 在坐标 $y^1, y^2, \cdots, y^n$ 下已有了形式

$$f(y) = \pm(y^1)^2 \pm \cdots \pm (y^{k-1})^2 + \sum_{\alpha,\beta\geqslant k} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta}(y),$$

其中函数 $P_{\alpha\beta}(y)$ 在 0 点构成了对称非退化矩阵. 显然, 在 $k=1$ 时, 归纳法的假设成立 (参看矩阵 $(h_{\alpha\beta})$ 的构造, 就是矩阵在 $k=1$ 时的情况). 将函数 $f(y)$ 写为:

$$f(y) = \pm(y^1)^2 \pm \cdots \pm (y^{k-1})^2 + P_{kk}(y)(y^k)^2 + \sum_{\alpha,\beta\geqslant k} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta}(y)$$

$$(\text{当 } \beta = k \text{ 时 } \alpha \neq \beta),$$

在图 49 中表示了 $n\times n$ 阶矩阵 $(P_{\alpha\beta}(y))$ 的形状. 因为 $(P_{\alpha\beta})$ 对称且非退化, 故存在变量 $y^k, y^{k+1}, \cdots, y^n$ 的线性变换, 使得在坐标原点矩阵 $(P_{\alpha\beta}(0))$ 化为对角形; 特别可以假定已经如此选定了坐标 $y^k, \cdots, y^n$, 因而 $P_{kk}(0)\neq 0$. 考虑函数 $q(y) = \sqrt{|P_{kk}(y)|}$, 并作变量变换: $(y^i)\to(z^i)$ 为

$$z^i = y^i, \quad \text{当 } 1\leqslant i\leqslant k-1, \ \ k+1\leqslant i\leqslant n;$$

$$z^k = q(y)\left(y^k + \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}(y)}{P_{kk}(y)}\right).$$

我们来求变换 $(y)\to(z)$ 在点 0 的雅可比 (参看图 50).

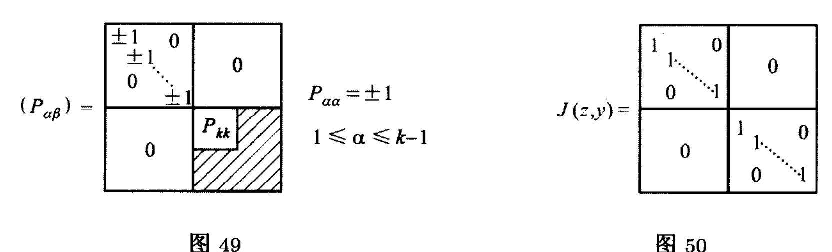


图 49　　　　图 50

显然, $\left.\dfrac{\partial z^k}{\partial y^k}\right|_0 = q(0) = \sqrt{|P_{kk}(0)|}\neq 0$, 即 $\det J(z,y) = \dfrac{\partial z^k}{\partial y^k}\neq 0$. 根据隐函数定理, 函数 $(z^1,\cdots,z^n)$ 为在点 0 某个邻域内的局部坐标 (这也可以由三角形矩阵的坐标变换得到). 因此, 我们得到了

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{i\leqslant k-1} \pm(z^i)^2 + P_{kk}\frac{(z^k)^2}{q^2(y)} - 2P_{kk}\frac{z^k}{q(y)}\sum_{i>k} y^i\frac{P_{ik}}{P_{kk}} \\ &\quad + P_{kk}\left(\sum_{i>k} y^i\frac{P_{ik}}{P_{kk}}\right)^2 + 2\left(\frac{z^k}{q(y)} - \sum_{i>k} y^i\frac{P_{ik}}{P_{kk}}\right)\sum_{i>k} y^i P_{ik} \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta>k+1} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta} = \pm(z^1)^2 \pm\cdots\pm(z^k)^2 + \sum_{\alpha,\beta\geqslant k+1} z^\alpha z^\beta \widetilde{P}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

归纳步骤完成, 从而在任意 n 时证明了所要的断言. □

注 但是所证过的这个引理, 在讨论函数 $f(x)$ 在临界点的邻域中的水平曲面时不是非常重要的. 早已清楚, 由于 f 的非退化性, 水平曲面的拓扑由形式 d^2f 决定.

引理 2 设 $f(x)$ 为紧闭流形 M^m 上的光滑函数, 并设线段 $[a,b](a<b)$ 不包含函数 f 的临界值 (即在集合 $f^{-1}[a,b]$ 中不包含临界点). 于是流形 f_a 微分同胚于 f_b, 并且带边缘的流形 $M_a=\{x|f(x)\leqslant a\}$ 微分同胚于 M_b.

证明 由于 M 的紧性, 存在 $\varepsilon>0$ 使得线段 $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$ 也不含有 $f(x)$ 的临界值. 不妨设在 M 上给出了 (正定) 黎曼度量; 考虑向量场 $\mathrm{grad}f(x)=v(x)$. 在带边缘流形 $f^{-1}[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$ 上, 这个场没有奇点, 而 $v(x)$ 垂直于水平超曲面 $f^{-1}(\alpha),a\leqslant\alpha\leqslant b$. 我们考察向量场 $v(x)$ 的积分轨线, 它由 $f^{-1}(b)$ 出发, 终止于 $f^{-1}(a)$, 参看图 51.

由 M 的紧性, 可以选取由曲面 $f^{-1}(b)$ 沿向量场 $v(x)$ 的积分轨线到曲面 $f^{-1}(a)$ 的光滑形变. 于是 $f^{-1}(b)$ 与 $f^{-1}(b)$ 的微分同胚是显然的. 类似地可建立 M_a 与 M_b 之间的微分同胚, 这是因为完全逆像 $f^{-1}[a,b]$ 微分同胚于 $f_a\times I$, 其中 I 为线段. 引理得证. □

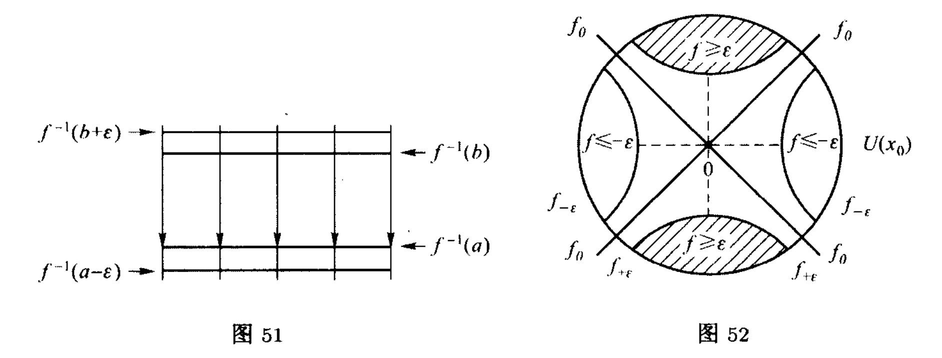


图 51　　图 52

现在来考察在靠近 $f(x)$ 的临界点处的水平曲面的行为.

设 $x_0\in M^n$ 是 $f(x)$ 的非退化临界点, 其中 $f(x_0)=0$. 于是由莫尔斯引理, 在点 x_0 的充分小的邻域 $U(x_0)$ 内可以引进曲线坐标 $x^1,\cdots,x^n$, 使得 $f(x)=-(x^1)^2-\cdots-(x^\lambda)^2+(x^{\lambda+1})^2+\cdots+(x^n)^2$. 我们设邻域 $U(x_0)$ 的中心 0 在点 x_0 处, 从而 $f(0)=0$. 考虑三个超曲面 $f_0,f_\varepsilon,f_{-\varepsilon},\varepsilon>0$ 为充分小. 它们在区域 U 中由方程

$$-(x^1)^2-\cdots-(x^\lambda)^2+(x^{\lambda+1})^2+\cdots+(x^n)^2=\begin{cases}0,\\ \varepsilon,\\ -\varepsilon\end{cases}$$

给出. 这里的 λ 是临界点指数. 显见, 在坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 下, 曲面 f_0 是顶点在 0 点的锥面, 而另两个曲面 $f_{\pm\varepsilon}$ 是双曲面 (参看图 52)

引理 3 在上述条件下，当 $f^{-1}[-\varepsilon,\varepsilon]=M_{+\varepsilon}\backslash M_{-\varepsilon}$ 只包含一个指标为 λ 的临界点时, 流形 $M_{+\varepsilon}$ 则具有一个胞腔复形的同伦型，它由 $M_{-\varepsilon}$ 通过在 $M_{-\varepsilon}$ 上附加一个胞腔 σ^λ 在边界 $f_{-\varepsilon}=\partial M_{-\varepsilon}$ 得到 (σ^λ 的维数为 λ, 而 λ 为临界点 x_0 的指数).

证明 我们来构造形变 $\varphi_t: M_{+\varepsilon}\to M_{+\varepsilon}$, 其中 $\varphi_0=1$, 而 $\varphi_1: M_{+\varepsilon}\to M_{-\varepsilon}\cup\sigma^\lambda$, 它在 $M_{-\varepsilon}$ 为恒同映射; 由前叙引理可证明这样的形变存在. 考虑向量场 $v(x)=-\mathrm{grad}f(x)$, 作为 φ_t, 在 $M_{-\varepsilon}$ 和邻域 U 之外点 x 沿着向量场 $U(x)$ 的积分轨线形变; 在邻域 U 内形变 φ_t 为在图 53 中显示的那个形变. 在这里的线段 AB 象征性地表示圆盘 $D^\lambda(x^1,\cdots,x^\lambda)$, 它的边界 (球面 $S^{\lambda-1}$) 光滑地嵌入到区域 $M_{-\varepsilon}$ 的边界 $f_{-\varepsilon}$ (在图上, $\lambda=1$, 而边缘为球面 S^0, 是一对点 A 和 B). 形变的结果显示在图 54 中. 引理证讫. □

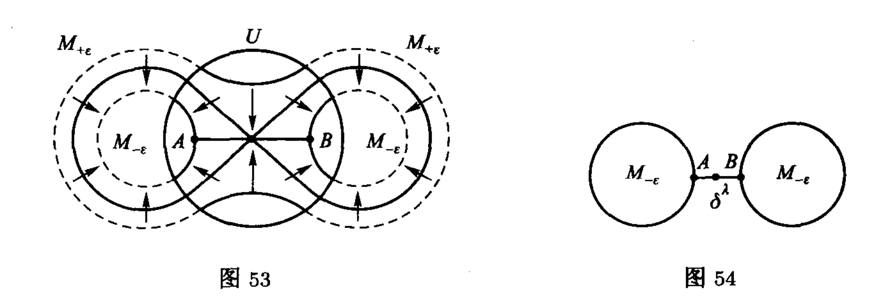


图 53　　　　图 54

定理 1 任意光滑紧的连通闭流形 M^n 都具有胞腔复形的同伦型, 在它上面的每个指数为 λ 的临界点 P_λ (其中所有 P_λ 都是 M 上某个莫尔斯函数的临界点) 对应于 λ 维的胞腔.

证明 考虑 M 上的莫尔斯函数, 在其每个临界点处, f 的水平面正好只有一个临界点. 这样的函数相当多 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §10). 因此, 由前面的引理和 [1], 卷 Ⅱ, §10 的定理 5 得出了本定理. □

在附加了某些分析性质后, 函数 f 对于临界点指数给了一些限制.

习题 1 如果 $f=\mathrm{Re}F(z^1,\cdots,z^n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上一个复解析函数的实部, 则任意非退化临界点 $(z_0^1,\cdots,z_0^n)=z_0$ 的指数等于 n.

习题 2 如果 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数, 则非退化临界点的指数不等于 0 或者 n (极大值原理).

但是在紧流形上并不存在复解析的和调和的函数. 我们指出习题 1 结果的一个在拓扑方面的应用: 设 M^{2n} 为 $\mathbb{C}P^N = \mathbb{C}^N \cup \mathbb{C}P_\infty^{N-1}$ 中的紧复子流形. 于是 M^{2n} 的 "有限部分"V 位于 $\mathbb{C}^N$ 内. 交集 $W = \mathbb{C}P_\infty^{N-1} \cap M^{2n}$ 是所谓的 "超平面截影".将 $\mathbb{C}^N$ 的复坐标中任一个分量的实部限制在有限部分 V 上, 它给出了 V 上的一个莫尔斯函数 f; f 的所有临界点具指数 n. 由此及上面的定理容易知道, 流形 M^{2n} 同伦等价于胞腔复形 $[W \cup \sigma_1^n \cup \cdots \cup \sigma_k^n] \cup \sigma^{2n}$, 其中 k 为在有限部分 $V \subset \mathbb{C}^N$ 上函数 f 的临界点的个数.(请给出精确的证明!) 由此得到等式:

$$\pi_i(W) = \pi_i(M^{2n}), i < n-1,$$
$$H_i(W) = H_i(M^{2n}), i < n-1 \text{或} n < i < 2n.$$

包含诱导的映射 $H_{n-1}(W) \to H_{n-1}(M^{2n})$ 为在上的同态 (即满同态).

§16. 莫尔斯不等式

在光滑闭流形 M^n 上, 函数 $f(x)$ 的临界点 (平稳点) 个数和此流形的拓扑不变量之间存在紧密的联系, 这些拓扑不变量包括同调群, 欧拉示性类等等.

在 [1], 卷 Ⅱ, §15 中建立过定理, 即数 $\sum_{\lambda \geqslant 0} (-1)^\lambda \mu_\lambda(f)$ 与 M^n 上的莫尔斯函数 f 无关, 而等同于欧拉示性数. 这里的 $\mu_\lambda(f)$ 为 f 的具指数 λ 的临界点的个数. 运用 §15 的结果, 我们得到下面的论断.

定理 1 如果 $b_k(M^n)$ 为流形 M^n 的同调群 (具任意系数域) 的秩, 则对 M^n 上任意莫尔斯函数 f (即只具有非退化临界点) 成立不等式:

$$\mu_\lambda(f) \geqslant b_\lambda(M^n), \quad \lambda = 0, 1, \cdots, n.$$

证明 根据本章的定理 15.1; 函数 f 产生了流形 M^n 上的一个胞腔空间的结构. 这意味着, 流形 M^n 同伦等价于胞腔空间 K, 它由一系列附加胞腔得到: $K_{i+1} = K_i \cup \sigma^{\lambda_i}$, 其中具给定维数 λ 的胞腔的总数正好等于 f 的指标为 λ 的临界点的个数 $\mu_\lambda(f)$. 像在 §4 中 (参看定理 4.1) 所证明的, 这样的胞腔空间同伦等价于胞腔复形 $\widetilde{K}$, 它具有 $\mu_\lambda(f)$ 个 λ 维胞腔. 因此 $\widetilde{K}$ 同伦等价于 M^n, 从而 $H_q(\widetilde{K}) = H_q(M^n)$ 对所有的 q 和所有的系数群 G 成立. 因为同调群 $H_\lambda(\widetilde{K})$ 的秩不超过 λ 维的胞腔个数, 故而证明了定理. □

但是, 在与复形 $\widetilde{K} \sim M^n$ 的胞腔数直接有关的数 $\mu_\lambda(f)$ 与贝蒂数 $b_\lambda(M^n)$ ($H_\lambda(M^n)$ 的秩) 之间的关系中, 这个定理并没有给出所有的关系. 我们还知道另一个关系 (参看 §2)

$$\sum_{\lambda \geqslant 0} (-1)^\lambda b_\lambda = \sum_{\lambda \geqslant 0} (-1)^\lambda \mu_\lambda(f). \tag{1}$$

这些关系的完全组可以方便地以代数方式这样来表达: 我们建立母函数 $P(M^n, t) = \sum b_\lambda t^\lambda$ (流形 M^n 的庞加莱多项式) 和 $Q(M^n, f, t) = \sum \mu_\lambda(f) t^\lambda$ (函数 f 的庞加莱多项式), 它对任意胞腔复形 $\widetilde{K}$ 都有定义, 其中 μ_λ 为 λ 维的胞腔个数. 于是, 令 $t = -1$, 则由 (1) 得到差 $Q - P$ 可被 $(1+t)$ 整除. 原来, 关系式 $\dfrac{Q-P}{1+t}$ 具有非负的整系数. 这个结果将在以后以更一般形式加以证明. 把莫尔斯不等式推广到具退化临界点的函数也是方便的.

设 $f(x)$ 为无限可微的函数.

定义 1 称点 $x_0 \in M$ 为函数 $f(x)$ 的**拓扑正则点**是说, 存在开邻域 $U = U(x_0)$, 它同胚于 f 的水平曲面和线段的直积 $\{f^{-1}(a)\} \times I[-\varepsilon, \varepsilon]$ (其中 $a = f(x_0)$; 参看图 55). 另外要求这个同胚的 "纤维性", 即使得曲面 $(f^{-1}(a), t)$ 与水平曲面 $f^{-1}(a+t)$ 在邻域 U 中相同.

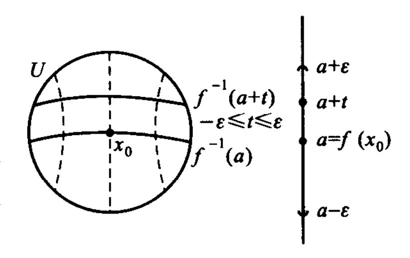


图 55

定义 2 如果点 $x_0 \in M$ 不是拓扑正则点, 则称 x_0 为函数 f 的**分岔点**.

考察例题. 如果 $x_0 \in M$ 为 M 上莫尔斯函数 $f(x)$ 的非退化临界点, 则显然, x_0 是分岔点 (参看图 56).

但是光滑函数 f 的退化临界点 x_0 不总是分岔点.

例 设 $M = \mathbb{R}^1, f(x) = x^3, x_0 = 0 \in \mathbb{R}^1$. 于是 x_0 是 f 的退化临界点, 但是同时, x_0 为 f 的拓扑正则 (非分岔) 点 (参看图 57).

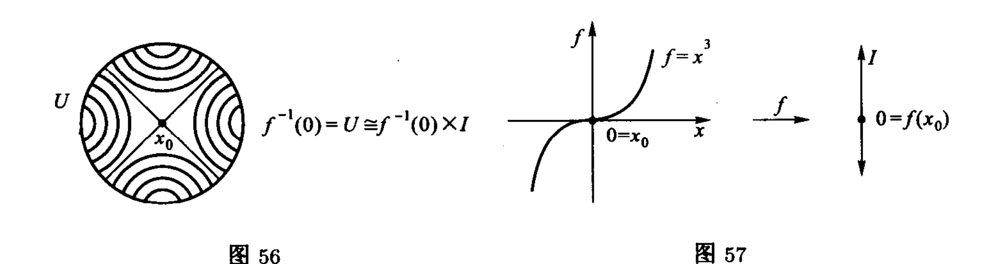


图 56 图 57

设 M^n 为光滑紧闭流形, 以及其上的可容许光滑函数 $f(x)$, 即它有有限个分岔点 (例如 f 为 M 上的莫尔斯函数).

设 $c_1, c_2, \cdots, c_N (N < \infty)$ 为函数 f 的临界值 (即 $f^{-1}(c_\alpha)$ 至少含有一个分岔点). 因为 f 只有有限个分岔点, 则它们全都是孤立的. 设 $\{x\}_\alpha$ 表示在水平面 $\{f(x) = c_\alpha\}$ 上的分岔点的集合. 考虑 $M_{c_\alpha} = \{f(x) \leqslant c_\alpha\}$. 相对同

调群 $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ 是函数 f 的分岔点的最重要的不变量. (对于群 $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$, 因为点 $\{x\}_\alpha$ 的孤立性, 可以理解为群 $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus U\{x\}_\alpha)$, 其中 $U\{x\}_\alpha$ 是点 $\{x\}_\alpha$ 的充分小的开邻域组.)

定义 3　称多项式

$$Q(M,f,t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k=0}^{n} b_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) t^k$$

为函数 $f: M \to \mathbb{R}^1$ 的**庞加莱多项式**, 其中 $b_k(X,Y) = \dim H_k(X,Y)$.

定理 2　设 $P(M,t)$ 和 $Q(M,f,t)$ 分别是前面引进的和刚刚引进的庞加莱多项式. 于是差 $Q-P$ 被 $1+t$ 整除, 并且商 $\dfrac{Q-P}{1+t}$ 有非负的整系数.

引理 1　设 $a<b$ 为函数 $f: M \to \mathbb{R}^1$ 的值域中的两个数, 使得在线段 $[a,b]$ 中没有 f 的临界值. 于是 M_a 收缩到 M_b, 并且 $H_*(M_a, M_b) = 0$.

引理的证明已在 §15. 对莫尔斯函数给出过了. 我们略去一般性的证明.

引理 2　对于某个充分小的 $\varepsilon > 0$, 有等式

$$b_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) = b_k(M_{c_{\alpha+\varepsilon}}, M_{c_{\alpha-\varepsilon}}).$$

证明　只需证明群 $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ 与 $H_k(M_{c_{\alpha+\varepsilon}}, M_{c_{\alpha-\varepsilon}})$ 同构就可以了. 这个论断由群 $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ 的定义和由前一个引理得到. □

我们现在考虑特殊形状的三个庞加莱型的多项式: $P(M_a) = \sum\limits_{(k)} b_k(M_a) t^k$; $P(M_b, M_a) = \sum\limits_{(k)} b_k(M_b, M_a) t^k$, 其中 $a < b$ (即 $M_b \supset M_a$); $P(\mathrm{Im}\partial) = \sum\limits_{(k)} \dim(\mathrm{Im}\partial_{k+1}) t^k$, 其中算子 $\partial_{k+1}: H_{k+1}(M_b, M_a) \to H_k(M_a)$ 为在 (M_b, M_a) 的同调正合序列中的边缘算子 —— 参看 §5.

引理 3　成立等式

$$P(M_b, M_a) - \{P(M_b) - P(M_a)\} = (1+t) P(\mathrm{Im}\partial).$$

证明　考虑空间对 (M_b, M_a) 的同调正合序列:

$$H_{k+1}(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(M_a) \xrightarrow{i} H_k(M_b) \xrightarrow{j} H_k(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(M_a).$$

由此序列的正合性得到下列的关系组:

$$
\begin{aligned}
b_k(M_b, M_a) = {} & \dim(\mathrm{Im}j) + \dim(\mathrm{Im}\partial_k); \\
& \dim(\mathrm{Im}j) = b_k(M_b) - \dim(\mathrm{Im}i) = b_k(M_b) - \{b_k(M_a) \\
& -\dim(\mathrm{Im}\partial_{k+1})\} = \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\} + \dim(\mathrm{Im}\partial_{k+1}); \\
& b_k(M_b, M_a) - \dim(\mathrm{Im}j) = b_k(M_b, M_a) - \{b_k(M_b) \\
& -b_k(M_a)\} - \dim(\mathrm{Im}\partial_{k+1}) = R_k - \dim(\mathrm{Im}\partial_{k+1}) \\
= {} & \dim(\mathrm{Im}\partial_k),
\end{aligned}
$$

其中 $R_k = b_k(M_b, M_a) - \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\}$.

因此:

$$
\begin{aligned}
R_k &= \dim(\mathrm{Im}\partial_{k+1}) + \dim(\mathrm{Im}\partial_k), \\
t^k R_k &= t^k \dim(\mathrm{Im}\partial_{k+1}) + t(t^{k-1}\dim(\mathrm{Im}\partial_k)),
\end{aligned}
$$

即 $\sum\limits_{(k)} t^k R_k = (1+t)P(\mathrm{Im}\partial)$, 这就证明了引理. □

现在直接转向**定理的证明**. 考虑函数 $f(x)$ 的所有临界值 $c_1, c_2, \cdots, c_N (N < \infty)$ (即 $f^{-1}(c_j)$ 中至少存在 f 的一个分岔点). 再考虑数 $a_0, a_1, \cdots, a_N, a_{N+1}$ 使得 $a_0 < c_1, a_i < c_{i+1} < a_{i+1}; c_N < a_{N+1}$ (即非临界值 $\{a_i\}$ 分割开临界值 $\{c_i\}$, 参看图 58).

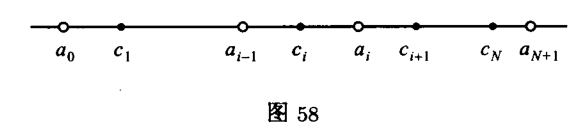


图 58

由前面的引理得到:

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) - \{P(M_{a_{i+1}}) - P(M_{a_i})\} = (1+t)P(\mathrm{Im}\partial_i).$$

显然, 这些等式对 i 从 0 到 $N+1$ 的和给出

$$Q(M,t) - P(M_{N+1}) + P(M_{a_0}) = (1+t)K(t),$$

其中多项式 $K(t)$ 具有非负系数. 然后我们利用那些事实:

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) = P(M_{c_i}, M_{c_i} \setminus \{x\}_i)$$

(这由上述引理得到). 现在, 因为 a_{N+1} 可以假定为如此之大, 使得 $a_{N+1} > \max\limits_{x\in M} f(x)$, 故而 $M_{a_{N+1}} = M$, 那么我们便有 $P(M_{a_{N+1}}) \equiv P(M)$; 另外, 因为 a_0

可以假定被选成 $a_0 < \min\limits_{x\in M} f(x)$, 即 $M_{a_0} = \varnothing$, 故 $P(M_{a_0}) = 0$, 而按定义, 庞加莱多项式是从 $k=0$ 开始按 k 取和. 因此, 最终有 $Q(M,f) - P(M) = (1+t)K(t)$, 从而证明了定理. □

现在我们考虑这个定理的推论. 设取实数群 $\mathbb{R}$ 为系数群 G. 这时称数 $b_k = \mathrm{rank}(H_k)$ 为空间 M 的贝蒂数. 又设 f 为流形 M 上的容许光滑函数; 我们把 $f(x)$ 的庞加莱多项式写成 $Q(M,f) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \mu_k t^k$ 的形式, 而对 M 的庞加莱多项式写成 $P(M) = \sum\limits_{k\geqslant 0} b_k t^k$. 称数 μ_k 为光滑函数 f 的 "莫尔斯数" (当 f 是 M 上的莫尔斯函数时, 这些数有特别直观的解释). 于是由上面所证过的定理, 得到

$$Q(M,f) - P(M) = \sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k = (1+t)K(t).$$

由此知道, 多项式 $\sum\limits_{(k)} (\mu_k - b_k)t^k$ 有非负系数, 即 $\mu_k \geqslant b_k$. 因此, 流形 M 的贝蒂数 b_k 数值上小于莫尔斯数 μ_k. 更进一步, $\sum\limits_{(k)} \mu_k t^k = \sum\limits_{(k)} b_k t^k + (1+t)K(t)$; 当 $t=-1$ 时有 $\sum\limits_{(k)} (-1)^k \mu_k = \sum\limits_{(k)} (-1)^k b_k$, 其右端是流形 M 的欧拉示性数 (即贝蒂数的交错和: $\chi(M) = \sum\limits_{(k)} (-1)^k b_k$). 故而对 M 上任意容许函数 f 的莫尔斯数的交错和原来是流形 M 的同伦不变量 (特别, 对任意光滑函数 f 都是同一个数).

又, 把 $(1+t)^{-1}$ 按 t 展开, 有

$$(1+t)^{-1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha t^\alpha,$$

于是

$$\left(\sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k \right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha t^\alpha > 0,$$

即左端在合并同类项后, 有了非负系数. 由此对于固定的 λ 得下面的不等式:

$$(\mu_0 - b_0)(-1)^\lambda + (\mu_1 - b_1)(-1)^{\lambda-1} + (\mu_2 - b_2)(-1)^{\lambda-2} + \cdots + (\mu_\lambda - b_\lambda) \geqslant 0,$$

即

$$\mu_\lambda - \mu_{\lambda-1} + \mu_{\lambda-2} - \cdots \pm \mu_0 \geqslant b_\lambda - b_{\lambda-1} + b_{\lambda-2} - \cdots \pm b_0.$$

现在设 $f(x)$ 为紧流形 M 上的莫尔斯函数. 这时数 $\{\mu_k\}$ 具有特别显见的几何意义. 设 x_0 为函数 f 的非退化临界点 (从而为分岔点), 并设 x_0 的指数为 λ. 我们来求群 $H_*(M_c, M_c \setminus \{x_0\}) = H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$ 的维数, 其中 $\varepsilon > 0$ 充分小, $c = f(x_0)$ 为临界值; 此外, 设 x_0 为临界水平面 $f^{-1}(c)$ 中唯一的临界点.

因为对于胞腔复形对 (X, Y) (其中 Y 为 X 的子复形), 它满足恒等式 $H_*(X, Y) \cong H_*(X/Y, *)$, 故而

$$H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon}) \cong H_*(M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon}, *).$$

由于早先研究过的同伦等价 $M_{c+\varepsilon} \sim M_{c-\varepsilon} \cup \sigma^\lambda$ (其中 σ^λ 为 λ 维的胞腔), 我们得到

$$H_*(M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon}, *) \cong H_*(\sigma^\lambda/\partial\sigma^\lambda, *) \cong H_*(S^\lambda, *),$$

其中 $\sigma^\lambda/\partial\sigma^\lambda \cong S^\lambda$ 为 λ 维的球面. 因此,

$$H_k(M_c, M_c \setminus \{x_0\}) \cong H_k(S^\lambda, *) = \begin{cases} \mathbb{R}, \ k = \lambda, \\ 0, \ k \neq \lambda. \end{cases}$$

举几个有启发性的例子, 这时 x_0 为 $f(x)$ 的退化临界点. 例如说 $f(x, y) = \mathrm{Re}(z^n), z = x + iy$. 在图 59 中显示了 f 的水平面的形象. 于是, $M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon} \cong S^1 \vee S^1$.

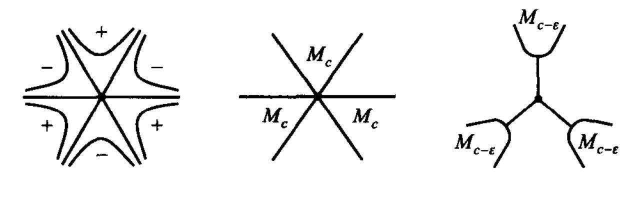


图 59

如我们在前面所指出的那样, 一个退化的临界点可以用函数 f 的一个小的扰动化为一些非退化临界点的并集. 在我们所分析的例子中, $\mathrm{Re}(z^n)$ 的点 O 分解成了 $n-1$ 个非退化奇点的并 (参看上面的详情). 这个观察来自一个一般性的命题:多项式 $Q(M, f)$ 在函数 f 充分小的扰动下不变. 事实上, $Q(M, f)$ 是通过相对同调群 $H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$ 表达的, 而这个群显然在函数 f 的充分小扰动下不变. 因此, 多项式 $Q(M, f)$ 带有那些所有指数 λ 的非退化点的信息, 这些非退化点出现在函数 f 的退化奇点的分解之中 (当它被充分小扰动时).

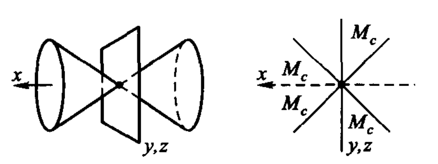


图 60

最后再考虑一个函数 f 的退化奇点的例子. 设 $f(x, y, z) = x^3 - 3x(y^2 + z^2)$. 利用图 60, 读者可以确认, 在这时 $M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon} \sim S^1 \vee S^2$, 从而可计算出同调群 $H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$.

§17. 莫尔斯 – 斯梅尔正常函数. 环柄. 曲面

可以证明, 在任意紧光滑连通闭流形上总存在这样的莫尔斯函数, 它只具有一个极小点和一个极大点.

例如, 对于二维定向流形 M_g^2, 可以在 $\mathbb{R}^3$ 中 "好" 的嵌入曲面的高度函数中找到这样的函数 (见图 61).

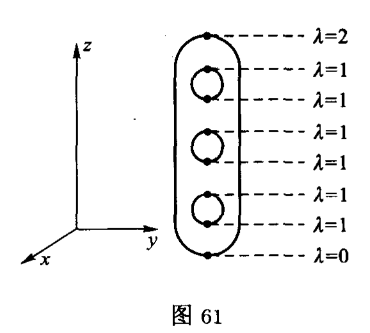


图 61

也可以证明, 在流形上总存在那样的莫尔斯函数, 即其临界值能够按其指数排序, 即当 $\lambda=\mu$ 时 $f(x_\lambda)=f(x_\mu)$, 当 $\lambda>\mu$ 时 $f(x_\lambda)>f(x_\mu)$; λ,μ 分别为点 x_λ 和 x_μ 的指数. 常称此类函数为 "正常" 函数 (或者斯梅尔 (Smale) 函数). 这样的莫尔斯函数与一般莫尔斯函数不同, 它们在 M 的所有光滑函数空间中不是处处稠密的.

定理 1　在任意紧光滑闭流形上总存在正常莫尔斯函数, 它正好有一个极大点 (指标为 $\lambda=n=\dim M$ 的点), 并且正好有一个极小点 (指标为 0 的点).

如果根据 §15 的定理, 按照正常莫尔斯函数建立 M^n 的胞腔剖分, 则在每一步将附加一个比前一个胞腔有更大维数的胞腔.

定理的证明　我们对 M^n 上的光滑函数 $f(x)$ 引进一个有用的辅助概念, 即拟梯度场. 以 $\xi(f)$ 代表函数 f 沿场 ξ 的导数.

定义 1　称 M 上的光滑向量场 ξ 为拟梯度的意思是, 如果 1) 在集合 $M\setminus\{x_1,\cdots,x_N\}$ 上 $\xi(f)\neq 0$, 其中 $\{x_i\}$ 为莫尔斯函数 f 的临界点; 2) 对任意点 x_i 存在开邻域 $U(x_i)$, 使得在任意坐标系下, 在邻域 $U(x_i)$ 中有

$$f(x)|_{U(x_i)}=f(x_i)-\sum_{k=1}^{\lambda}(x^k)^2+\sum_{k=\lambda+1}^{n}(x^k)^2,$$

而场 ξ 有形式

$$\xi(x)=(-x^1,\cdots,-x^\lambda;x^{\lambda+1},\cdots,x^n).$$

显然, 对 M 上的任意莫尔斯函数 f 存在这样的向量场 ξ (例如, 对于 M 的某个度量的 $\xi=\mathrm{grad} f$).

设 $x_i\in M$ 为 f 的临界点, x_i 的指数 $=\lambda,\xi$ 为 f 的拟梯度场. 考虑那个所谓点 x_i 的分界图, 即所有场 ξ 的从点 x_i 出发或终点在点 x_i 的积分轨线. 于是在邻域 $U(x_i)$ 中, 这个图具有图 62 所展示的样子.

流入的轨线充满了圆盘 $D^\lambda(x^1,\cdots,x^\lambda)$; 流出的则充满圆盘 $D^{n-\lambda}(x^{\lambda+1},\cdots,x^n)$.

考虑两个球面: $S^{\lambda-1}=D^\lambda\cap\{f(x)=f(x_i)-\varepsilon\}; S^{n-\lambda-1}=D^{n-\lambda}\cap\{f(x)=f(x_i)+\varepsilon\}$, 其中 ε 充分小. 不妨设在邻域 $U(x_i)$ 中 $S^{\lambda-1}=\partial D^\lambda, S^{n-\lambda-1}=\partial D^{n-\lambda}$; 参看图 63.

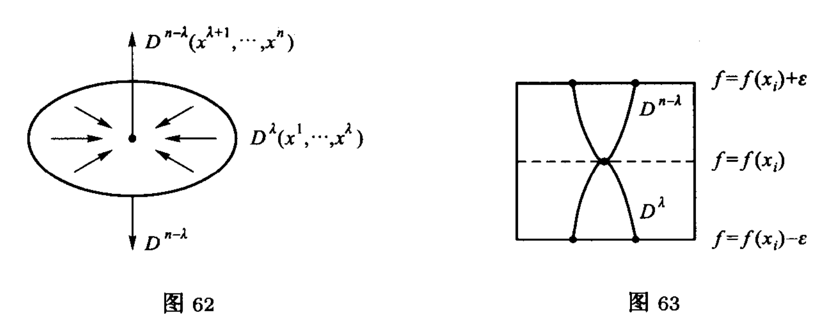


图 62　　图 63

观察圆盘 $D^\lambda(x_i)$ 和 $D^{n-\lambda}(x_i)$ 沿场 ξ 的积分轨线的 "拉开"; 于是球面 $S^{\lambda-1}(x_i)$ 和 $S^{n-\lambda-1}(x_i)$ 也将如此地被光滑形变, 它们沿场 ξ 的轨线无自交地移动, 一直到不遇到任意其他的临界点 x_j.(显然, 场 ξ 的轨线只能交于函数 f 的临界点.)

引理 1 设在 "夹层" $M_{b'}\setminus M_{a'}=f^{-1}[a',b']$ 中有 f 的两个临界点 x_0,y_0, 其中 $a'<a=f(x_0)<f(y_0)=b<b'$; 又设 ξ 为 f 的拟梯度场. 假定在夹层 $f^{-1}[a',b']$ 中满足关系 $D^{n-\lambda}(x_0)\cap D^{\lambda'}(y_0)=\varnothing$ (这里的 $\lambda=\mathrm{ind}(x_0),\lambda'=\mathrm{ind}(y_0)$). 于是在流形 M^n 上存在一个新的莫尔斯函数 g 使在 $f^{-1}[a',b']$ 外有 $f=g$, 同时 g 在 M 上与函数 f 有相同的临界点; 场 ξ 也是函数 g 的拟梯度场; 又在邻域 $U(x_0)$ 和 $U(y_0)$ 中有 $g=f+$ 常数.

证明 由引理的条件得到, 在夹层 $f^{-1}[a',b']$ 中, 点 x_0 和 y_0 的分界图不相交 (参看图 64), 即 $(D^{n-\lambda}(x_0)\cup D^\lambda(x_0))\cap(D^{n-\lambda'}(y_0)\cup D^{\lambda'}(y_0))=\varnothing$. 我们给出记号:

$$W=f^{-1}[a',b'];A=D^{n-\lambda}(x_0)\cup D^\lambda(x_0);B=D^{n-\lambda'}(y_0)\cup D^{\lambda'}(y_0).$$

那么显然,

$$\begin{aligned}W\setminus(A\cup B)&\cong(f^{-1}(b')\setminus(A\cup B)\cap f^{-1}(b'))\times I[a',b']\\&\cong(f^{-1}(a')\setminus((A\cup B)\cap f^{-1}(a')))\times I[a',b'].\end{aligned}$$

这个关系也可以写成: 补集 $W\setminus(A\cup B)$ 微分同胚于直积

$$\begin{aligned}&(f^{-1}(b')\setminus(S^{n-\lambda'-1}(y_0)\cup S^{n-\lambda-1}(x_0)))\times I[a',b']\\&\cong(f^{-1}(a')\setminus(S^{\lambda'-1}(y_0)\cup S^{\lambda-1}(x_0)))\times I[a',b'],\end{aligned}$$

其中 $I[a',b']$ 为线段.(为简便起见设 $a'=0,b'=1$.) 特别, 在流形 $f^{-1}(b')\setminus(S^{n-\lambda'-1}(y_0)\cup S^{n-\lambda-1}(x_0))$ 和流形 $f^{-1}(b')\setminus(S^{\lambda'-1}(y_0)\cup S^{\lambda-1}(x_0))$ 之间的微分同胚沿着场 ξ 的轨线 γ 得以实现. 我们考察在 $f^{-1}(a')$ 上的光滑函数 $\alpha(x)$, 它在 $A\cap f^{-1}(a')$ 的充分小的邻域中为零: $\alpha(x)=0$; 在 $B\cap f^{-1}(a')$ 的充分小的邻域中 $\alpha(x)=1$. 因为 $A\cap B=\varnothing$, 故存在这样的函数. 由在 $f^{-1}(a')$ 上给出的函数 α, 我们构造在整个 W 上的光滑函数 $\alpha(x)$, 它是 α 的延拓, 使它沿场 ξ 的积分轨线保持常值 (这些轨线在 $A\cup B$ 外不交). 于是所得到的 W 上的函数 $\alpha(x)$ 沿任一条不进入 $A\cap B$ 的一个开邻域的轨线 γ 为常值且在 $U(A)$ 中 $\alpha=0$, 而在 $U(B)$ 中 $\alpha=1$.

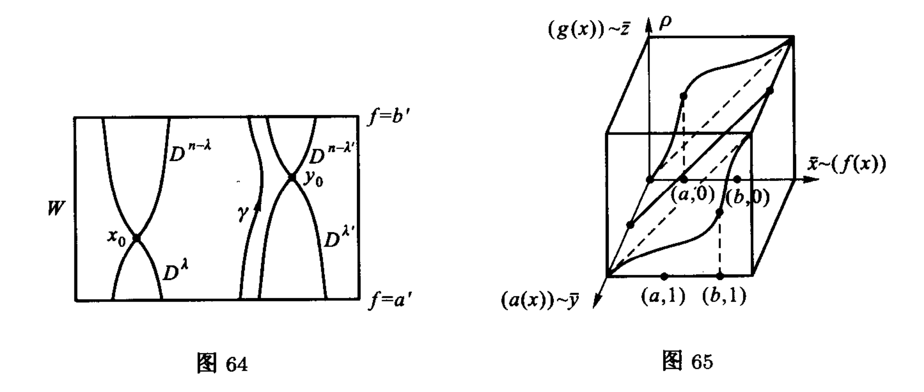


图 64　　　　　　　　图 65

考虑在图 65 中所给出的图形所代表的光滑函数 $\rho(\bar{x},\bar{y})=\bar{z}$.

图 66 上展示了 $\bar{z}=\rho(\bar{x},\bar{y})$ 的图像与平面 $\bar{y}=t$ (常数) 的交线在 t 从 0 变到 1 时的逐步展开.

我们把加在函数 ρ 上的规定条件写成下面的形式:

1) $\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}}(\rho(\bar{x},\bar{y}))>0$ 对所有 $(\bar{x},\bar{y})$ 成立, 并且当 $\bar{x}$ 从 0 增至 1 时, $\rho(\bar{x},\bar{y})$ 也从 0 增至 1;

2) $\rho(a,0)=b;\rho(b,1)=a$;

3) $\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}}(\rho(\bar{x},0))\equiv 1$ 对 a 的邻域中所有的 $\bar{x}$ 成立; 又任给 b 的某邻域, 对其中所有的 $\bar{x}$, 有 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}}(\rho(\bar{x},1))\equiv 1$ (参看图 67)

现在定义我们想要的函数 $g(x)=\rho(f(x),\alpha(x)),x\in W$. 于是 $g(x_0)=\rho(f(x_0),\alpha(x_0))=\rho(a,0)>\rho(b,1)=\rho(f(y_0),\alpha(y_0))=g(y_0)$. 因此, $g(x_0)>g(y_0)$. 由函数 ρ 的条件 1)—3), 得到了满足所有在引理中规定条件的函数 $g(x)$. 引理证完. □

引理 2　考虑 $W=f^{-1}[a',b']$. 设 $x_0,y_0\in W$, 满足 $f(x_0)<f(y_0)$ 和 $\lambda(x_0)=f$ 在点 x_0 的指数 $\geqslant\lambda(y_0)=f$ 在点 y_0 的指数. 于是存在 M 上的莫尔斯函数 g,

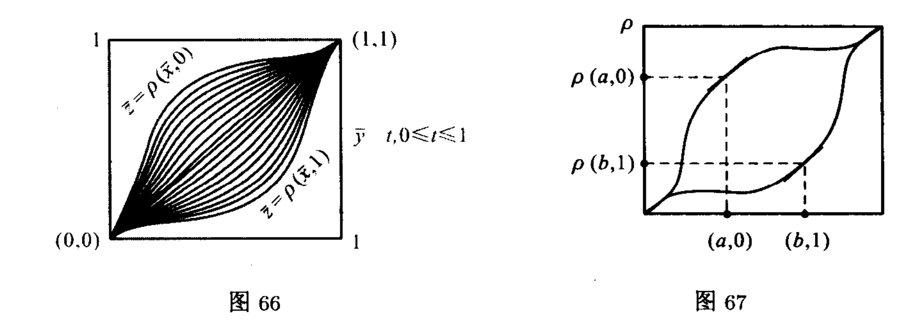


图 66　　　　图 67

使得 $g(x_0)>g(y_0)$; g 具有与 f 有相同的临界点; 函数 $g(x)$ 还满足引理 1 中其他所有的条件.

证明 在 $A\cap B=\varnothing$ 的条件下引理已证 (参看上面的引理). 对一般的 $A\cap B\neq\varnothing$ 的情形, 我们将把它简化为 $A\cap B=\varnothing$ 的情形. 现在考虑曲面 $\{f(x)=\dfrac{1}{2}\}=V$ (我们假定 $a'=0,b'=1,0<f(x_0)<\dfrac{1}{2}<f(y_0)<1$). 令 $\lambda=\lambda(x_0),\lambda'=\lambda(y_0)$. 设 $A\cap B\neq\varnothing$. 这表明在曲面 V 上, $S^{n-\lambda-1}(x_0)\cap S^{\lambda'-1}(y_0)\neq 0$ (参看图 68). 事实上, 如果这个交为空, 那么 $A\cap B=\varnothing$. 因为 $\dfrac{1}{2}\in[a',b']$ 不是临界值, 故 $V=V^{n-1}$ 是个 $n-1$ 维光滑流形, 而球面 $S^{n-\lambda-1}(x_0)$ 和 $S^{\lambda'-1}(y_0)$ 是 V 的光滑子流形. 因为

$$\dim S^{n-\lambda-1}(x_0)+\dim S^{\lambda'-1}(y_0)=n-\lambda-1+\lambda'-1=n-\underbrace{(\lambda-\lambda')}_{\geqslant 0}-2<n-1,$$

于是由关于 $t-$ 正则性的一般性定理 (参看 [1], 卷 II, §10) 知道, 存在一个包含映射$i:S^{N-1}\to V$ 的任意小的到邻近的包含映射的同痕, 使得后一个包含映射的像与球面 $S^{n-\lambda-1}(x_0)$ 相交为空集. 那么可清楚看出, 这个同痕可以延拓到曲面 V 的一个小邻域内, 然后可以将这个同痕在此邻域外为恒同形变, 从而扩充到整个 W. 使拟梯度场从属于这个所想要的同痕后, 我们便得到了两个不相交的分界图 A 和 B (见图 69). 这样便把所讨论的情形化到 $A\cap B=\varnothing$ 的情形. 引理得证. □

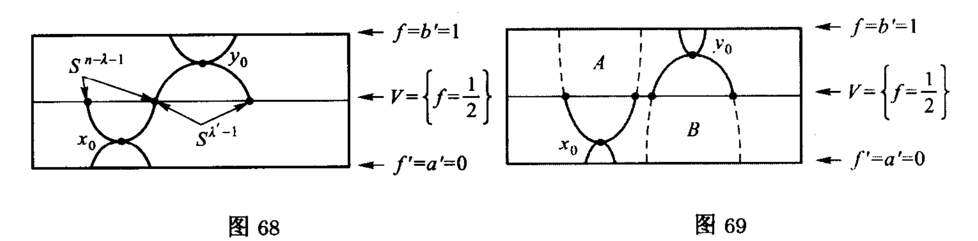


图 68　　　　图 69

于是, 定理的关于存在正常莫尔斯函数的论断已得到完全的证明. 至于定

理的第二部分论断 (即关于存在只有一个极大点和一个极小点的正常莫尔斯函数的存在性), 我们将其作为一个有益的 (相对简单的 (特别是二维流形的情形)) 练习留给读者. □

现在考虑把胞腔 σ^λ 附加到流形 $M_{-\varepsilon}$ (见前面) 的边缘上的更细致的过程. 我们要以微分的角度解释清楚, 在 "经过临界点 x^λ 的过程" 后, 在流形 $M_{-\varepsilon}$ 中发生了什么, 即从称做附加环柄的运算的观点看流形 $M_{-\varepsilon}$ 如何变化.

考虑直积 $H^n_\lambda = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, 其中 D^q 表示 q 维圆盘. 称 H^n_λ 为带边缘的指数为 λ 的 n 维环柄. 很清楚, 边缘 $dH^n_\lambda = (\partial D^\lambda) \times D^{n-\lambda} \cup D^\lambda \times (\partial D^{n-\lambda}) = (S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) \cup (D^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$. 我们定义环柄 H^n_λ 在边缘为 $V^{n-1} = \partial K^n$ 的流形 K^n 上的附加运算. 设 $S^{\lambda-1} \subset V^{n-1}$ 为光滑嵌入球面, 使得它的充分小的管状邻域 $T_\varepsilon(S^{\lambda-1})$ (半径 $\varepsilon > 0$) 表示为直积 $T_\varepsilon(S^{\lambda-1}) \cong S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, 其中 $\cong$ 为微分同胚, $\{s \times D^{n-\lambda}\}, s \in S^{\lambda-1}$ 为球面 $S^{\lambda-1}$ 的半径为 ε 的法线圆盘 (参看图 70).

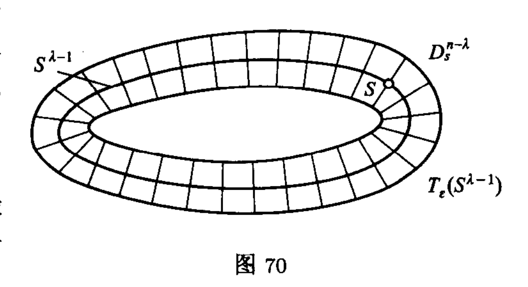


图 70

于是可以构造出新的光滑流形 $\widetilde{K}^n$, 其边缘为 $\widetilde{V}^{n-1} = \partial\widetilde{K}^n$, 这时以映射 $\chi: S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to T_\varepsilon(S^{\lambda-1}) \cong S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ (微分同胚) 将 H^n_λ 附加于 K^n, 即 χ 是 $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}(\partial H^n_\lambda$ 的边缘的一部分) 到管状邻域 $T_\varepsilon(S^{\lambda-1})$ 的微分同胚. 图 71 展示了附加环柄 $H^2_1, n = 2$ 的运算.

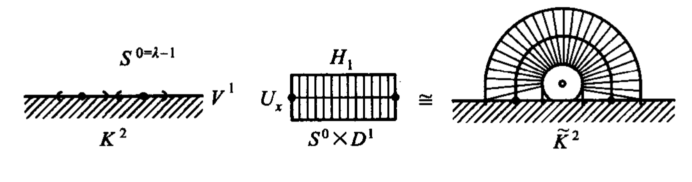


图 71

抹平在点 $x \in \partial T_\varepsilon(S^{\lambda-1}) = S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$ 的 "棱角", 我们得到了具光滑边缘 $\tilde{V}^{n-1}$ 的光滑流形 $\widetilde{K}^n$. (在图 72 中这个 "抹平" 以虚线表示.)

在图 72 上展示了附加环柄 H^3_1 到 K^3 的运算.

在图 73 上展示了附加环柄 H^3_2 到 K^3 的运算.

定理 2　任意光滑紧连通闭流形 M^n 微分同胚于环柄 $\{H^n_\lambda\}$ 的并空间, 其中 P_λ 为 M^n 上某个莫尔斯函数的临界点; λ 为 P_λ 的指数, 而每个点 P_λ 对应于环柄 H^n_λ.

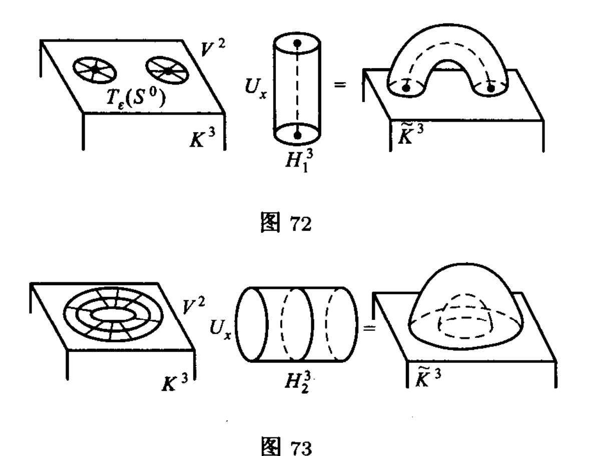


图 72

图 73

证明 因为当 $a<b$ 时, 如果在线段 $[a,b]$ 上没有函数 $f(x)$ 的临界值时 M_a 微分同胚于 M_b, 则只需研究在经过临界点时 $M_{-\varepsilon}$ 的变化即可. 我们考虑光滑的形变 $M_\varepsilon \to M_{-\varepsilon}$ (参看引理 15.3), 但现在像图 74 所显示的那样变化.

在图 75 中显示了形变的结果.

可清楚看到, 环柄 H_λ^n 的 "轴" 为圆盘 $D^\lambda(x^1,\cdots,x^\lambda)$, 它由场 $v(x)=-\text{grad}f(x)$ 的由场 $v(x)$ 的奇点走出的积分轨线组成. 定理得证. □

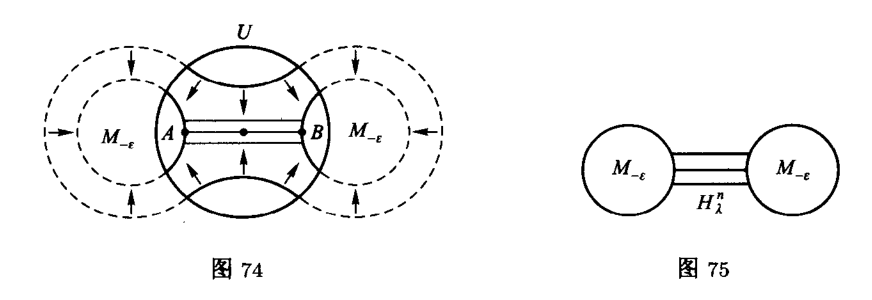


图 74　　　　图 75

如果反过来, 已知流形 M 分解为环柄 $\{H_\lambda^n\}$ 的并, 则可恢复出 M^n 上的某些莫尔斯函数 $f(x)$, 使得它们相伴的 M 的分解为环柄的并与 M 原来的分解 $\{H_\lambda^n\}$ 的并重合. 证明由对环柄的个数和它们的指数进行归纳进行. 环柄 $\{H_0^n\}$ 可与那些 D^n 等同, 并让它们的中心为指数 0 的临界点. 将以表示水平曲面 f_c 来构造出函数 $f(x)$ (函数 $f(x)$ 不是唯一决定的): 于是作为在圆盘 $\{D^n\}=\{H_0^n\}$ 中的曲面 $\{f_c\}$, 我们取为同心的球面, 其中心在使 $f(x)$ 取局部极小处. 设 $f(x)$ 已经在具边缘 $V^{n-1}=\{f=a\}$ 的光滑流形 $\{f\leqslant a\}$ 上构造好了, 并设环柄 H_λ^n 已附加到边缘 V^{n-1} 上了. 现要把 $f(x)$ 延拓到环柄 H_λ^n 上. 这个延拓显示在图 76 上.

所得到的函数 $g(x)$ 在流形 $\{f\leqslant a\}\cup H_\lambda^n$ 的边界上重新又是常值, 故而这

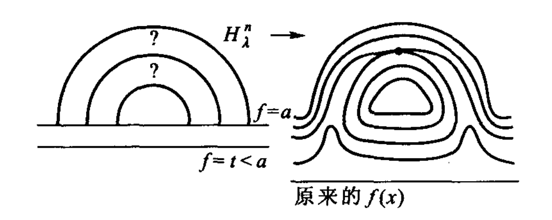


图 76

个过程可以继续下去.

我们考虑二维流形 $\{M^2\}$ 和按上面所证定理中它的分解, 即分解为环柄 $\{H_\lambda^2\}$ 的 "和". 附带地我们又得到了二维曲面的分类定理 (参看 §3).

考虑在 M^2 上的正常莫尔斯函数 $f(x)$; 设 x_0 为极小点 (唯一的指数为 0 的点); $x_1, \cdots, x_N$ 为指数 1 的点; x_{N+1} 为极大点 (唯一的指数为 2 的点), 其中 $f(x_i) < f(x_{i+1}), 0 \leqslant i \leqslant N$. 可以假设, $0 \leqslant f(x) \leqslant N+1, f(x_i) = i$. 于是集合 $0 \leqslant f \leqslant \varepsilon < 1$ 为环柄 H_0^2 (同伦等价于点 σ^0, 即零维胞腔). 当通过临界值 $f(x_1) = 1$ 时, 出现了环柄 H_1^2 (见图 77).

当 $n = 2$ 时, 只存在两种附加环柄 H_1^2 到 H_0^2 的方式 (见图 78)

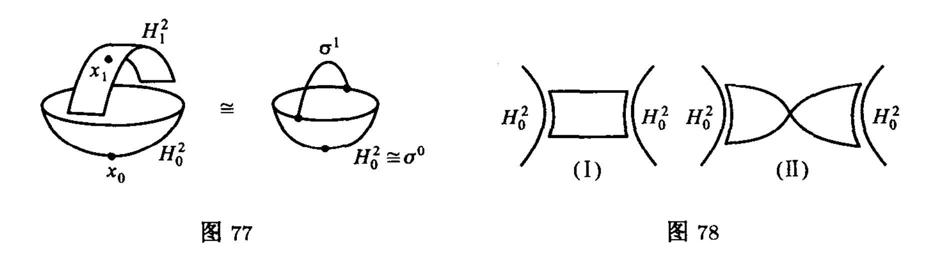


图 77　　　　图 78

如果考虑所得带边缘的流形的微分同胚的话, 则这两种同伦等价的附加胞腔的方式却不是微分同胚的: $H_0^2 \underset{\mathrm{I}}{\cup} H_1^2 \underset{\text{diff}}{\cong} S^1 \times D^1$ (圆柱); $H_0^2 \underset{\mathrm{II}}{\cup} H_1^2$ (默比乌斯带). 在第一种情形中得到了 (带边缘的) 定向曲面, 在第二种, 则是非定向的.

继续这个过程, 并转向点 $x_2, x_3, \cdots, x_N$; 在每一步我们附加一个一维胞腔 $\sigma_i^1, 1 \leqslant i \leqslant N$; 而以环柄的词条来说, 或是附加了 $S^1 \times D^1$, 或是附加了默比乌斯带. 在转移过 $x_N (f(x_N) = N)$ 时, 以同伦的观点看, 我们得到了圆束 $\bigvee\limits_{i=1}^{N} S_i^1$; 每个圆 $S_i^1 = \sigma_i^1 \cup \sigma^0$ 对应于临界点 x_i (指数 1). 最后一步为附加环柄 $H_2^2 \cong D^2$, 即二维胞腔 σ^2, 它同胚于圆盘 D^2. 因此, M^2 同伦等价于胞腔复形 $\sigma^0 \cup \sigma_1^1 \cup \cdots \cup \sigma_N^1 \cup \sigma^2$, 从而微分同胚于 $H_0^2 \cup \underbrace{H_1^2 \cup \cdots \cup H_1^2}_{N} \cup H_2^2$. 在第 $(N+1)$ 步, 把胞腔 (环柄)$D^2 = H_2^2$ 附加到具边缘 $\partial K^2 = S^1$ 的流形 K^2 上, 它只以一种方式实现, 即恒同映射 $1_{S^1} : \partial D^2 \to \partial K^2$.

胞腔 $\sigma^2 \cong D^2$ 可以与基本多边形 W 等同, 其中 W 是在以前证明 $\{M^2\}$ 的分类定理所得到的那个多边形, 而圆束 $\bigvee_{i=1}^{N} S_i^1$ 则等同于多边形 W 的边缘, 它的所有顶点都等同于同一个顶点.

在图 79 中所显示的系列过程建立了环面 $T^2 = M_{g=1}^2$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的标准嵌入, 使得 $f(P) = z$ (高度函数) 为具 4 个临界点的莫尔斯函数: x_0 (极小), x_1, x_2 (指数为 1 的鞍点); x_3 (极大). 对 $g > 1, M_g^2$ 上的类似的高度函数且有 $2g+2$ 个非退化临界点: x_0 (极小); $x_1, \cdots, x_{2g}$ (鞍点); x_{2g+1} (极大).

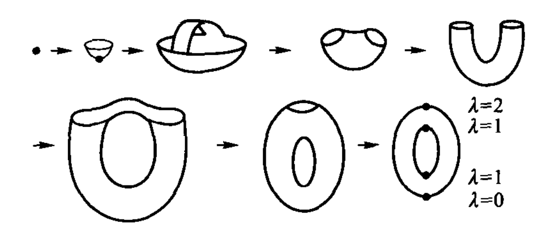


图 79

在任意 M_g^2 上也可以构造出具 4 个临界点 (极小, 极大和两个鞍点) 的高度函数. 这些鞍点当 $g > 1$ 是退化的. 所要的嵌入 $M_g^2 \to \mathbb{R}^3$ 显示在图 80 上.

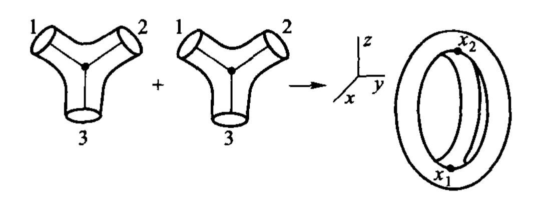


图 80

鞍点 x_1, x_2 在 $g > 1$ 时为退化临界点, 同时在点 x_1, x_2 的邻域中高度函数可被构造成像函数 $\mathrm{Re}(x+iy)^{1+g}$ 那样. 另外, 在任意的 $M^2(M_{g>0}^2$ 或 $M_\mu^2)$ 上存在有三个临界点的光滑函数 $f(x)$: 极小, 极大, 鞍点 (退化).(请证明, 对 $M_{g>0}^2$ 的这个函数不能以某个嵌入 $M_g^2 \to \mathbb{R}^3$ 的高度函数实现.) 事实上, 我们考虑 M_g^2 (或 M_μ^2) 的典则的对称形式 M_g^2 (或 M_μ^2) : $W = a_1 \cdots a_N a_1^{-1} \cdots a_{N-1} a_N^{\pm 1}$ (参看关于这种形式的存在性的 §3). 想要的函数 $f(x)$ 在图 81 中以水平面的曲线给出 (非唯一): ab 线的左边为极大点, 右边为极小, 退化鞍点在基本多边形的顶点. 函数 $f(x)$ 在这个退化鞍点的小邻域中有 $\mathrm{Re}(x+iy)^k$ 的形式 (请求出作为 g 或 μ 的函数的 k). 这个退化奇点分解为非退化的奇点并的情形显示在图 82 中. 我们以相应的向量场 $\mathrm{grad} f$ 来定义这个分解. f 的临界点与向量场 $\mathrm{grad} f$ 的奇点等同.

我们令 $f(x,y) = \mathrm{Re}(z^k)$, 其中 $z = x+iy$. 于是点 $0 \in \mathbb{R}^2(x,y)$ 为 f 的退化

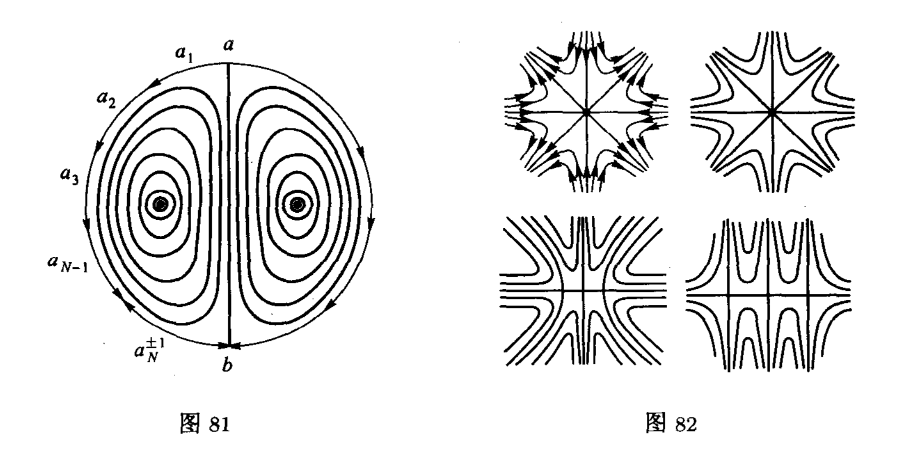


图 81　　　　图 82

临界点 (从而是场 $v(x,y)=\mathrm{grad}\mathrm{Re}(z^k)$ 的退化奇点). 图 82 显示了场 v 的积分轨线的图像.

考虑小扰动 $f(x,y)\to \mathrm{Re}\prod\limits_{\alpha=1}^{k}(z-\varepsilon_\alpha)$, 其中 $\varepsilon_i\neq\varepsilon_j$ 当 $i\neq j$ 时. 图 82 展示了退化奇点分解为 $k-1$ 个非退化奇点的并的情形.

注　当在流形 M^2 构造具三个临界点的光滑函数 f 时, 我们利用了 M^2 的下面表示: $W=a_1a_2\cdots a_Na_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{N-1}^{-1}a_N^{\pm1}$, 并以线段 (ab) 分割 W, 使得在 (ab) 分开的每一部分中没有二条标有同一字母 a_i 的边. 我们这样做, 对于避免 (在构造函数时) 出现退化临界点的连续集合是必要的 (见图 83).

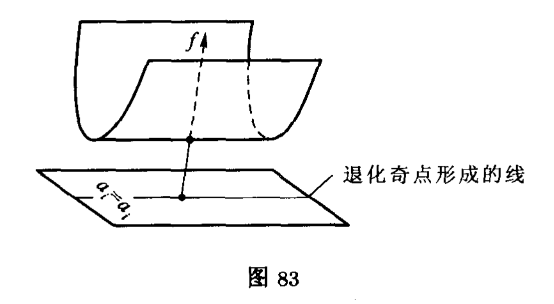


图 83

§18.　庞加莱对偶

在拓扑、代数几何和同调代数中对于一个广泛使用的词 "庞加莱对偶" 的理解是在各种不同场合下的许多论断, 它们表示了同调群和补维的上同调之间的同构关系. 最简单的庞加莱定理断言, 对于定向的紧闭光滑的连通流形 M^n 成立同构:

$$H_k(M;\mathbb{R})\cong H_{n-k}(M;\mathbb{R}),$$

其中的 $H_*(M;\mathbb{R})$ 为实系数的同调群, $n=\dim M^n$. 这个同构显然等价于流形 M 的贝蒂数满足条件 $b_k(M)=b_{n-k}(M)$. 如果流形 M 非定向, 则庞加莱对偶对于模 2 同调成立

$$H_k(M;\mathbb{Z}_2)\cong H_{n-k}(M;\mathbb{Z}_2).$$

我们将考虑定向的流形. 非定向的情形可类似地讨论.

对偶性基于下面的观察.

我们构造流形 M^n 的两个胞腔剖分 K 和 $\widetilde{K}$, 它们相互对偶. 更准确地说, 我们对每个胞腔 $\sigma^i\in K$, 借助于某个对应 $D:K\to\widetilde{K}$, 相伴于一个 $(n-i)$ 维胞腔 $D(\sigma^i)=\widetilde{\sigma}^{n-i}$ (即具补维的胞腔), 其中的对应 D 应该满足下列条件:

1. D 是复形 K 的胞腔和复形 $\widetilde{K}$ 中的胞腔间的一一对应.

2. 对任意两个胞腔 $\sigma^i,\sigma^{i-1}\subset K$, 其关联数 $[\sigma^i:\sigma^{i-1}]$ 在差一个符号 (仅与维数 i 有关) 的程度上等于胞腔 $\widetilde{\sigma}^{n-i},\widetilde{\sigma}^{n-i+1}$ 之间的关联系数, 这两个胞腔是原来的胞腔经 D 得到的, 即 $[\sigma^i:\sigma^{i-1}]\pm[\widetilde{\sigma}^{n-i+1}:\widetilde{\sigma}^{n-i}]$. 我们记住, 这是在考虑定向情形. 在非定向流形情形, 其关联系数应取模 2 剩余, 即在非定向情形满足等式 $[\sigma^i:\sigma^{i-1}]=[\widetilde{\sigma}^{n-i+1}:\widetilde{\sigma}^{n-i}]\mathrm{mod}2$.

我们考虑在 M^n 上的正常莫尔斯函数 $f(x)$, 它的临界点按其自身的指数排序, 即如果 $\lambda_i>\lambda_j, f(x_i)\geqslant f(x_j)$. 这样的 "正常" 莫尔斯函数的存在性已经在前面证过了.

我们在 M^n 上给出定向, 并连同函数 f 一起考虑函数 $g=-f$. 显然, 如果 x_i 为 f 的指数为 λ_i 的临界点, 则 x_i 为 g 的指数为 $n-\lambda_i$ 的临界点.

取由函数 f 产生的剖分 (参看前面的结果) 为流形 M 的胞腔剖分 K, 而由 $-f=g$ 产生的剖分作为 $\widetilde{K}$. 我们更仔细地考虑复形 K 和 $\widetilde{K}$ 之间的关系. 存在点 x_i 的小邻域 $U(x_i)$ 以及利用函数 f 和 $-f$ 所给出它的分解 (参看图 84).

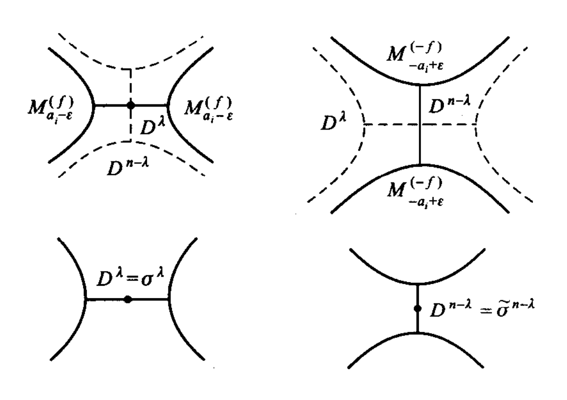


图 84

现在我们来构造想要的对应关系 (胞腔映射) $D: K \to \widetilde{K}$. 令 $D(\sigma^\lambda) = \widetilde{\sigma}^{n-\lambda}$ (见图 85). 函数 f 的胞腔 σ^λ 和函数 $g = -f$ 的胞腔 $\widetilde{\sigma}^{n-\lambda}$ 在 §15 已有所定义.

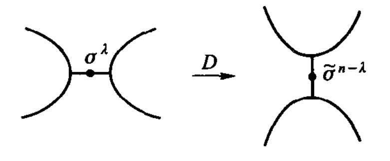


图 85

我们来研究关联系数 $[\sigma^\lambda : \sigma^{\lambda-1}]$ 和 $[\widetilde{\sigma}^{n-\lambda+1} : \widetilde{\sigma}^{n-\lambda}]$ 之间的关系.

考虑胞腔 σ_i^λ (i 为胞腔的标号) 和 $\sigma_j^{\lambda-1}$; 数 $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}]$ 按定义, 是映射 $p_{ij}^\lambda : S_i^{\lambda-1} \to S_j^{\lambda-1}$ 的映射度, 其中 $S_i^{\lambda-1} = \partial(\sigma_i^\lambda)$ (即胞腔 σ_i^λ 的边缘); p_{ij}^λ 为特征映射 $\partial\sigma_i^\lambda \to K^{\lambda-1}$ (σ_i^λ 在其边缘 $\partial\sigma_i^\lambda$ 上的限制) 和商复形 $\dfrac{K^{\lambda-1}}{K^{\lambda-2}} = \bigvee S_j^{\lambda-1}$ 到其第 j 个因子 $S_j^{\lambda-1}$ 投射的复合 (参看图 86).

所得到的这个数与球面 $S_i^{\lambda-1} = \partial\sigma_i^\lambda$ 和胞腔 $\widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ 的相交数 (参看 [1], 卷 II, §15)(见图 87)

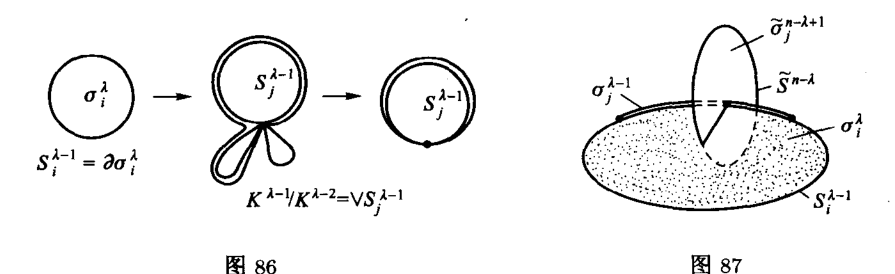


图 86 图 87

可清楚看出, 球面 $S_i^{\lambda-1}$ 与胞腔 $\widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ 的相交数等于球面 $S_i^{\lambda-1}$ 与球面 $\widetilde{S}_j^{n-\lambda} = \partial\sigma_j^{n-\lambda+1}$ 的环绕系数 (我们在这里略去了特征映射的记号). 我们以 $w(S_i^{\lambda-1}; \widetilde{S}_j^{n-\lambda})$ 表示这个环绕数. 因此我们证明了 $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}] = w(S_i^{\lambda-1}; \widetilde{S}_j^{n-\lambda})$. 完全类似地得到 $[\widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1} : \widetilde{\sigma}_i^{n-\lambda}] = w(S_j^{n-\lambda}; S_i^{\lambda-1})$. 比较最后面的这两个公式, 最终得到 K 与 $\widetilde{K}$ 的对偶, 即 $[\sigma^\lambda : \sigma^{\lambda-1}] = \pm[\widetilde{\sigma}^{n-\lambda-1} : \widetilde{\sigma}^{n-\lambda}]$.

因此对偶算子 $D: K \to \widetilde{K}$ 具有这样的性质, 即胞腔 σ_j^λ 与 $\widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda} = D(\sigma_j^\lambda)$ 只相交于一个内点, 并在此横截 (对于定向流形 M^n, 在所选取的胞腔的定向下, 这个相交数为 +1). 其余的胞腔偶对一般来说不相交. 这些胞腔构成了整系数 (或其他) 链群 $C_\lambda(K)$ 和 $C_\mu(\widetilde{K})$ 的基. 于是在链群之间建立了非退化的双线性纯量积 $a \circ b$, 称其为 "相交数": 如果 $a \in C_\lambda(K), b \in C_{n-\lambda}(\widetilde{K})$, 则

$$\sigma_i^\lambda \circ D\sigma_q^\lambda = \delta_{iq}, a \circ b = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^\lambda \circ \widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda})$$

(在非定向情形按 mod2 计算); 这里

$$a = \sum_i a_i \sigma_i^\lambda, b = \sum_j b_j \widetilde{\sigma}_j^{n-\lambda}.$$

设 $a \in C_\lambda(K), b \in C_{n-\lambda-1}(\widetilde{K})$; 因为 $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}] = [D\sigma_i^\lambda : D\sigma_j^{\lambda-1}]$, 故由此证明了伴随性质:

$$(\partial a) \circ b = a \circ \partial b.$$

于是复形 $(C(\widetilde{K}), \partial)$ 与复形 $(C(K), \partial)$ 相伴随. 从而得到

定理 1 成立典则的 "庞加莱对偶同构":

$$H_k(M^n) \cong H^{n-k}(M^n),$$

其中 M^n 为闭的定向光滑流形. 特别对贝蒂数有

$$b_k = b_{n-k}$$

(即 H_k 和 H_{n-k} 的秩相等). 在互为补维的同调群 H_k 与 H_{n-k} 之间有一个非退化的 (对于整系数同调为幺模的) 双线性形式, 并称这个形式为 "闭链的相交数".

如果 $n = 2k$, 则 $n - k = k$, 从而得到了 $H_k(M)$ 上的非退化形式:

$$a \circ b = (-1)^k b \circ a.$$

证明 定理的证明立即由前面的结论和一个补充的注解得到; 这个注解是说, 这两个复形 K 和 $\widetilde{K}$ 都同伦等价于 M^n, 从而根据 §5 的结果, 它们具有相同同调和上同调群. □

例 1 对任意定向连通流形 M^n 有 $H_0 = \mathbb{Z} = H_n(M^n)$. 对非定向流形有 $H_0(M^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (总是如此), 但 $H_n(M^n; \mathbb{Z}) = 0$. 在模 2 下有 $H_0(M^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 = H_n(M^n; \mathbb{Z}_2)$.

例 2 设 $n = 2$, 且 M^2 可定向. 群 $H_1(M^2; \mathbb{Z})$ 有非退化反称形式: 相交数. 由于它的维数为偶数并有标准的闭链基 $a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g$, 其中

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

群 $H_1(M^2; \mathbb{Z})$ 没有扰元, 而且闭链 a_i, b_i 可选取为整值闭链.

例 3 设 $M^2 = \mathbb{R}P^2$ (非定向). 群 $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ 只具一个生成元 x (即射影直线 $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$). 由在群 $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$ 上的非退化形式 $a \circ b (\mathrm{mod} 2)$ 得到

$$x \circ x = 1 (\mathrm{mod} 2).$$

例 4 设 M^n 为定向. 在流形 $M^n \times M^n$ 中有对角线闭链 $\Delta = (x, x), \Delta \in H_n(M^n \times M^n)$. 相交数 $\Delta \circ \Delta$ 等于欧拉示性数, 这是因为数 $\Delta \circ \Delta$ 等于向量场奇点

指标的和 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §15). 在群 $H_k(M^n\times M^n;\mathbb{R})=\sum\limits_{q+l=k}H_q(M^n)\otimes H_l(M^n)$ 中存在基闭链 $z_i\otimes z_j$, 其中 $\{z_i\}$ 为群 $H_*(M^n)$ 的基. 在这里的相交数为

$$(z_i\otimes z_j)\circ(z_k'\otimes z_l')=(z_i\otimes z_k')(z_j\otimes z_l');$$

它仅在 $\dim z_i+\dim z_k'=n, \dim z_j+\dim z_l'=n$ 时非零 (请验证!).

习题 1　设有映射 $f:M^n\to M^n$ 和所有 $f_{k,*}:H_k(M^n;\mathbb{R})\to H_k(M^n;\mathbb{R})$. 计算 $M^n\times M^n$ 上的相交数 $\Delta\circ\Delta_f$, 其中 $\Delta_f=\{(x,f(x))\}$ 为其图像. 证明莱夫谢茨公式 $\Delta\circ\Delta_f=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{tr}f_{k,*}$. (对于非定向流形需要将 $\mathbb{R}$ 换为 $\mathbb{Z}_2$). 数 $\Delta\circ\Delta_f$ 给出了映射 f 的不动点 (带符号) 的个数 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §15).

提示. 先考虑最简单的情形: $M^n=S^n, M^n=T^n, M^n=\mathbb{R}P^n, M^n=M_g^2$. 特别, 如果 f 同编于到一个点的映射情形, 这时有 $f_{k,*}=0, k>0$, 而 $f_{0,*}$ 为恒同映射. 在这种情形下 $\Delta\circ\Delta_f=1=\mathrm{tr}f_{0,*}$, 它与 [1], 卷 Ⅱ, §15 的结果相同.

习题 2　证明由上同调的乘积可给出在上同调群中的庞加莱对偶. 确切地, 这意味着公式

$$(ab,[M^n])=\langle a,b\rangle$$

为非退化, 其中 $a\in H^q(M^n), b\in H^{n-q}(M^n)$, 系数在域中. 如果问题是关于整系数的同调和上同调 $H_*(M^n;\mathbb{Z}), H^*(M^n;\mathbb{Z})$, 其中出现了挠元, 则这里的庞加莱对偶可用 “交运算” (见 §7) 方便地写成

$$Da=a\cap[M^n], \tag{1}$$

其中 $a\in H^k(M^n;\mathbb{Z})$, 而 $a\cap[M^n]\in H_{n-k}(M^n;\mathbb{Z})$. 对系数在域中的情形, 则由于公式

$$((a\cap[M^n]),b)=(ab,[M^n]), \tag{2}$$

公式 (1) 的关于 H_q 和 H^q 的相互伴随性并没有给出任何新的东西.

习题 3　设 $M\supset K$, 其中 M 和 K 为有限胞腔复形, $M\setminus K$ 为开的定向光滑流形. 证明等式

$$H_i(M,K;\mathbb{Z})\cong H_i(M/K;\mathbb{Z})\cong H^{n-i}(M\setminus K;\mathbb{Z}), i>0,$$
$$H^i(M,K;\mathbb{Z})\cong H^i(M/K;\mathbb{Z})\cong H_{n-i}(M\setminus K;\mathbb{Z}), i>0$$

(**莱夫谢茨对偶**). 分析特殊情形 $i=0$.

习题 4 设 $K^m \subset S^n(m < n)$ 为有限胞腔复形 K^m 在球面 S^n 中的嵌入. 证明等式

$$H_i(K^m;\mathbb{Z}) \cong H^{n-i-1}(S^n \setminus K^m;\mathbb{Z}), i > 0$$
$$H^i(K^m;\mathbb{Z}) \cong H_{n-i-1}(S^n \setminus K^m;\mathbb{Z}), i > 0$$

(亚历山大 (Alexander) 对偶). 分析特殊情况 $i = 0$.

习题 5 设 M^n 为光滑紧闭流形 $H_k(M^n;\mathbb{Z}) = R_k \oplus T_k$ 为 H_k 作为群分解为自由阿贝尔群 R_k 和有限阶阿贝尔群 T_k 的直和. 于是成立下面的同构: $R_k \cong R_{n-k}, T_k = T_{n-k-1}$.

注 对任意有限胞腔复形满足关系 $R_k \cong R^k, T_k \cong T^{k+1}$.

我们记得, 称下面的交错和

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \chi(M^n)$$

为欧拉示性数, 其中 $n = \dim M^n; \beta_i = \dim H_i(M^n;\mathbb{Z}_2)$ 为流形 M^n 的贝蒂数 (mod2). 由庞加莱对偶我们 (对闭流形) 得到 $\beta_i = \beta_{n-i}$, 于是对奇维流形 M^{2k+1} 有

$$\chi(M^{2k+1}) \equiv \sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i\beta_i \equiv 0$$

(对定向流形 M^n 可用对群 $G = \mathbb{R}$ 的贝蒂数得到上面等式).

§19. 光滑函数的临界点和柳斯捷尔尼克 – 施尼雷尔曼畴数

如果 f 为莫尔斯函数, 即其临界点在流形 M 上为非退化, 于是函数 f 的临界点的个数有下界

$$\mu_k \geqslant b_k;$$

我们在 §16 已经知道了这个结果, 其中的 μ_k 为指数为 k 的临界点数, b_k 为贝蒂数: $b_k = \dim H_k(M;G), G = \mathbb{R}$ 或 $G = \mathbb{Z}_2$ (或 $\mathbb{Z}_p, p$ 为奇数). 譬如, 在 M_g^2 型的任意二维曲面上, 莫尔斯函数有不少于 $2g+2$ 个临界点. 但是, 如果我们想要对任意光滑函数 f 去估计临界点个数的下界, 其中的 f 不必要是莫尔斯函数, 则情形相当复杂. 如最简单的例子所显示的, 非退化奇点个数会相当地小. 就像以前所知, 函数 f 在光滑函数空间中的形变下, 非退化奇点会相互融合在一起组成退化奇点. 这种相互融合减少了临界点的数目. 当莫尔斯函数在 M_g^2 上至少有 $2g+2$ 个临界点时, 在任意 M_g 上也存在光滑函数, 它具有三个临界点, 其中

一个是退化的 (其在进行扰动时分解为 $2g$ 个非退化临界点), 另外两个点中一个是极小, 一个是极大. 既便 f 不是莫尔斯函数的情形, 不等式 $\sum_{(k)} \mu_k \geqslant \sum_{(k)} b_k$ 仍然有效 (见 §16); 但是现在的 μ_k 不再具有在非退化情形时的那种意义了 (即为非退化奇点的指数). 现在的数 μ_k 描述了临界点的 "复杂度", 它再也不与个数直接相关了. 另外, 如同以前所指出的那样, 不是每个临界点都与分岔点有关 (参看上面的 §16), 故而 $\sum_{(k)} \mu_k \geqslant \sum_{(k)} b_k$ 这类的不等式在某些退化奇点情形并不加以考虑. 那么, 这些不等式不能对在所给流形 M^n 上的任意光滑函数 f 的奇点数目导出其下限的估值. 然而存在流形 M^n 的一个拓扑不变量 (称做**柳斯捷尔尼克 – 施尼雷尔曼** (Люсмерпцк–Шнцрельман) **畴数**), 记为 $\operatorname{cat}(M^n)$, 它给出了函数 f 的临界点个数的下界估计. 我们来进行对此不变量的描述.

设 X 为 (豪斯多夫 (Hausdorff)) 拓扑空间, $A \subset X$ 为 X 的任一闭子集.

定义 1 如果存在 k 个 X 的闭子集 $A_1, \cdots, A_k$, 满足

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

使得每个子集 A_i 在 X 中收缩为一个点, 我们则称具有这个性质的最小的数 k 为**闭子集 A 对于空间 X 的畴数**, 记为 $\operatorname{cat}_X(A)$.

注 定义中没有假定子集 $\{A_i\}$ 为连通. 为简便起见, 我们假定 X 为连通. 如果 $A = X$ 则定义 $\operatorname{cat}_X(X) = \operatorname{cat}(X)$. 称这个数为 X 的柳斯捷尔尼克 – 施尼雷尔曼畴数. 畴数 $\operatorname{cat}_X(A)$ 可取值 $1, 2, 3, \cdots$.

我们计算并证明 $\operatorname{cat}_X(A)$ 的基本性质.

引理 1 如果 $A \subset B \subset X$, 则 $\operatorname{cat}_X(A) \leqslant \operatorname{cat}_X(B)$.

证明 设 $q = \operatorname{cat}_X(B)$, 即存在闭子集 $B_i, 1 \leqslant i \leqslant q$, 使得

$$B = \bigcup_{i=1}^{q} B_i,$$

且每个 B_i 在 X 中收缩为一点. 考虑闭子集 $A_i = A \cap B_i, 1 \leqslant i \leqslant q$. 那么显然有

$$A = \bigcup_{i=1}^{q} A_i$$

而且每个 A_i 在 X 中收缩为一点. 因此 $\operatorname{cat}_X(A) \leqslant q = \operatorname{cat}_X(B)$, 这即是所要证明的. □

引理 2 设 A 和 B 为 X 的两个任意的闭子集. 于是 $\operatorname{cat}_X(A \cup B) \leqslant \operatorname{cat}_X(A) + \operatorname{cat}_X(B)$.

证明 设

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{p} B_j,$$

于是

$$A \cup B = \bigcup_{\alpha=1}^{p+k} C_\alpha,$$

其中 $C_\alpha = A_\alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant k; C_\alpha = B_{\alpha-k}, k+1 \leqslant \alpha \leqslant k+p$. 因为 A_i 和 B_j 在 X 中收缩为点, 则 C_α 也收缩到点, 从而 $\mathrm{cat}_X(C) \leqslant k+p = \mathrm{cat}_X(A) + \mathrm{cat}_X(B)$. 引理得证. □

引理 3 设 $A \subset B$ 为 X 中两个闭子集, 则

$$\mathrm{cat}_X(\overline{B \setminus A}) \geqslant \mathrm{cat}_X(B) - \mathrm{cat}_X(A),$$

其中 $\overline{B \setminus A}$ 表示 $B \setminus A$ 在 X 中的闭包.

证明 因为 $B = A \cup (\overline{B \setminus A})$, 所以由引理 2 得到

$$\mathrm{cat}_X(B) \leqslant \mathrm{cat}_X(A) + \mathrm{cat}_X(\overline{B \setminus A}).$$

引理得证. □

引理 4 设 $A \subset B$ 为 X 中两个闭子集, 并设子集 B 连续形变到子集 A 中 (即存在嵌入映射 i: $B \to X$ 的同伦 φ_t, 使得 $\varphi_1 : B \to X$ 满足 $\varphi_1(B) \subseteq X$). 于是 $\mathrm{cat}_X(A) \geqslant \mathrm{cat}_X(B)$. (子集 $\varphi_1(B) \subset X$ 可能不同胚于 B).

证明 设 $\mathrm{cat}_X(A) = k$. 考虑覆盖

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

其中所有 A_i 在 X 中收缩为点. 因为 $\varphi_1(B) \subset A$, 故 $\varphi_1(B) \subseteq A$, 故可考察 $R_j = \varphi_1(B) \cap A_j, 1 \leqslant j \leqslant k$. 由于引理的条件, 存在连续映射 $\alpha : i(B) \to \varphi_1(B)$, 其中子集 $i(B)$ 同胚于 B. 设 $B_j = \alpha^{-1}(R_j), 1 \leqslant j \leqslant k$. 显然

$$B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j.$$

另外, 将同伦 φ_t 应用到 B_j 上, 我们在 X 中将 B_j 形变到子集 $\varphi_1(B_j) = R_j \subset A_j$, 即 R_j 在 X 中收缩为点; 于是每个 B_j 在 X 中收缩为点; 从而 $\mathrm{cat}_X(B) \leqslant k$ (见图 88). 引理得证. □

引理 5 设 $A \subset X$, A 为紧集, X 为流形. 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\mathrm{cat}_X(U_\varepsilon A) = \mathrm{cat}_X(A)$, 这里以 $U_\varepsilon A$ 表示子集 $A \subset X$ 的闭 $\varepsilon-$ 邻域. 数 ε 依赖于 A.

证明 因为 $A \subset U_\varepsilon A$, 于是由引理 1 得到 $\mathrm{cat}_X A \leqslant \mathrm{cat}_A(U_\varepsilon A)$. 我们来证明相反的不等式. 设 $\mathrm{cat}_X(A) = k, A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, 其中每个 A_i 在 X 中收缩为点. 因为 X 为流形, 那么显然存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $U_\varepsilon A_i$ 跟随着 A_i 在 X 中收缩到点 $(1 \leqslant i \leqslant k)$. 因为 $U_\varepsilon A = \bigcup_{i=1}^{k} U_\varepsilon A_i$, 故 $\mathrm{cat}_X(U_\varepsilon A) \leqslant k = \mathrm{cat}_X(A)$. 引理证完. □

注 如果 X 不是流形则引理 5 不再成立 (参看图 89)

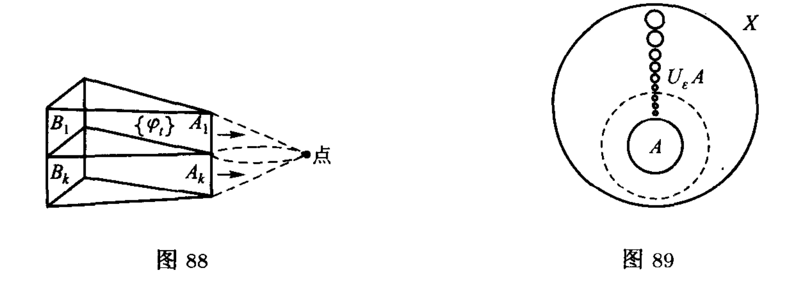


图 88　　　　图 89

引理 6 假设 X 为流形. 设 $A, B_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为 X 中的闭子集, 并且 $A = \lim_{n\to\infty} B_n$, 即当 $n \to \infty$ 时 $\rho(A, B_n) \to 0$, 其中假定了 X 为度量空间, $\rho(C, D) = \sup_{x\in C}(\inf_{y\in D} \rho(x, y)) + \sup_{y\in D}(\inf_{x\in C} \rho(x, y))$; $\rho(x, y)$ 为 X 中两个点之间的距离. 假定 $\mathrm{cat}_X(B_n) \geqslant k$, 于是 $\mathrm{cat}_X(A) \geqslant k$.

证明 由引理 5, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\mathrm{cat}_X(U_\varepsilon A) = \mathrm{cat}_X(A)$. 因为 $\rho(A, B_n) \to 0$, 故存在序号 N 使得当 $n > N$ 时 $B_n \subset U_\varepsilon A$. 于是 $k \leqslant \mathrm{cat}_X(B_n) \leqslant \mathrm{cat}_X(U_\varepsilon A) = \mathrm{cat}_X(A)$. 引理得证. □

定理 1 设 M^n 为光滑紧连通闭流形, $f(x)$ 为 M^n 上的光滑函数. 于是有不等式 $k \geqslant \mathrm{cat}(M^n)$, 其中 k 为函数 f 的不同临界点的个数.(特别, k 可以等于无穷大.)

事实上, 定理对于函数 f 的分岔点也是正确的, 即 $p \geqslant \mathrm{cat}(M^n)$, 其中 p 等于函数 f 的不同的分岔点的个数. 我们首先讨论一种存在于函数 f 的临界点集的畸数的行为和 $\mathbb{R}^n$ 上某个双线性形式的特征值的行为之间的相似性.

考虑球面 S^{n-1} 在 $\mathbb{R}^n(x^1, \cdots, x^n)$ 中的标准嵌入, 即 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$. 设 $B(x, y)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个对称的双线性实形式. 考察由公式 $f(x) = B(x, x)$, $|x| = 1$ 给出的在球面 S^{n-1} 上相关联的光滑函数 $f(x)$. 我们来找出函数 f 的所有临界点. 设 $x \in S^{n-1}, \bar{a} \in T_x(S^{n-1})$; 考虑函数 f 的导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \bar{a}}\right|_x$, 这是在

点 x 沿方向 $\bar{a}$ 的导数. 设 $x(t)$ 为球面 S^{n-1} 上一条任意的光滑曲线, 使得 $x(0)=x, \dot{x}(0)=\bar{a}$. 于是

$$\left.\frac{df}{d\bar{a}}\right|_x = \left.\frac{d}{dt}f(x(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}B(x(t),x(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\langle Bx(t),x(t)\rangle\right|_{t=0},$$

其中以 $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 代表了形式 B 所相伴的对称算子 (对于欧氏内积 $\langle,\rangle$ 而言). 从而

$$\left.\frac{df}{d\bar{a}}\right|_x = \left.\frac{d}{dt}\langle Bx(t),x(t)\rangle\right|_{t=0} = \langle B\dot{x},x\rangle + \langle Bx,\dot{x}\rangle = 2\langle Bx,\bar{a}\rangle.$$

于是, 点 $x_0\in S^{n-1}$ 为 f 的临界点当且仅当对任意向量 $\bar{a}\in T_{x_0}(S^{n-1})$ 有 $\langle Bx_0,\bar{a}\rangle\equiv 0$. 这个条件等价于下面的论述: 向量 Bx_0 垂直于平面 $T_{x_0}(S^{n-1})$, 即 $Bx_0=\lambda x_0$, 其中 λ 为实数.

设 $e_0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 为形式 B 的特征向量, $\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}$ 分别为它们对应的特征值. 由于算子 B 的对称性, 所有的向量 $e_0,e_1,\cdots,e_{n-1}$ 两两正交 (不妨设它们为单位长), 而 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 为实数. 我们记得有 $f(e_\alpha)=\langle Be_\alpha,e_\alpha\rangle=\langle\lambda_\alpha e_\alpha,e_\alpha\rangle=\lambda_\alpha\langle e_\alpha,e_\alpha\rangle=\lambda_\alpha$. 我们假定数 λ_α (和向量 e_α) 按大小排序, 即 $\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-1}$.

考虑球面 S^{n-1} 中的所有 i 维赤道 S^i, 即 S^{n-1} 的以 $i+1$ 维平面相截的截影, 这些平面通过了坐标原点. 我们以 M_i 代表所有这些 "赤道" 的集合 (即 $M_i=\{S^i\}$). 固定任意一个赤道 $S^i\subset S^{n-1}$ 并考虑 $\max\limits_{x\in S^i}f(x)$. 由二次型理论已完全了解有等式 $\lambda_i=\inf\limits_{M_i}(\max\limits_{x\in S^i}f(x)), 0\leqslant i\leqslant n-1$. (假设读者已自己证明了这个等式.) 可清楚看出, 上面所引进的公式与已固定的排序 $\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-1}$ 一致. 我们还注意到, 群 $SO(n)$ 在每个类 M_i 上作用, 并是可迁的 (任意的赤道 S^i 可由一个固定的赤道 S_0^i 通过某个旋转 $g\in SO(n)$ 得到).

命题 1 函数 $f(x)=\langle Bx,x\rangle$ 在球面 S^{n-1} 上的不同临界点的个数不小于类 $\{M_i\}$ 的个数, 即 $2n$.

证明 如果形式 B 的所有特征值 $\{\lambda_\alpha\}$ 各不相同, 则函数 f 的临界点恰好是点 $\{\pm e_\alpha\}$ (即向量 $\pm e_\alpha$ 的端点, $0\leqslant\alpha\leqslant n-1$). 因为这样的点的个数等于 $2n$, 故 n 等于类 $\{M_i\}, 0\leqslant i\leqslant n-1$ 的个数. 如果找到那样的指标对 $i<j$, 但 $\lambda_i=\lambda_j$, 则球面 S^{j-i} 完全由函数 f 的退化临界点构成, 并且因为这些点是个连续体, 故所要的论断成立. □

注 因为函数 $f(x)=\langle Bx,x\rangle$ 对于反射 $x\to -x$ 不变, 故 $f(x)$ 在射影空间 $\mathbb{R}P^{n-1}$ 诱导了商函数 $\widetilde{f}(x)$; 对于函数 $\widetilde{f}$ 有上面命题的一个变形: 函数 $\widetilde{f}$ 在 $\mathbb{R}P^{n-1}$ 上的不同临界点的个数不小于类 $\{M_i\}$ 的个数, 即 n.

在这些先前所做的注解之后, 我们转向研究在任意的光滑紧闭流形 M^n 上的光滑函数 f 的临界点. 我们作变换把问题转换到上面所讲述的构造.

把球面 S^n 换成流形 M; 形式 $B(x,x)$ 换成任意的光滑函数 $f(x), x\in M$; 把保持每个类 M_i (见前面) 的旋转 $g\in SO(n)$ 换为考虑连续的同伦, 我们将证明某些类似于类 M_i 的闭子集类在它的作用下不变; 把形式 $\overline{B}$ 的特征值 λ_i 换为考虑它们的某种类比, 它由闭子集类构造. 现在来详细阐述.

设 M^n 为光滑紧连通闭流形. 以 M_i 表示所有闭子集 $X\subset M^n$ 的类, 使得 $\text{cat}_M(X)\geqslant i$. 显然, $M_i\supset M_{i+1}$. 以 $\Theta(M^n)$ 表示流形 M^n 中所有闭子集的空间. 空间 $\Theta(M^n)$, 引进度量

$$\rho(X,Y)=\sup_{x\in X}(\inf_{y\in Y}\rho(x,y))+\sup_{y\in Y}(\inf_{x\in X}\rho(x,y))$$

而成为度量空间, 其中 ρ 为 M^n 上的距离. 我们说 $Y=\lim\limits_{p\to\infty}X_p$ 是说 $\lim\limits_{p\to\infty}\rho(Y,X_p)=0$, 其中 $Y,X_p\in\Theta$.

引理 7 每个子集类 $M_i\subset\Theta(M^n)$ 在极限运算 lim 下和对于流形 M 中子集的同伦下 (即包含映射的同伦) 封闭.

证明 设 $X_p\in M_i; p=1,2,3,\cdots; X=\lim\limits_{p\to\infty}X_p; \text{cat}_{M^n}(X_p)\geqslant i$ (按类 M_i 的定义). 要证明 $\text{cat}_{M^n}(X)\geqslant i$. 这直接由引理 6 得到. 另外, 设 $X\in M_i, Y=\varphi_1X\subset M^n$ 为子集, 它由连续形变 $\varphi_t: X\to M^n$ 从 X 得到. 因为 $\text{cat}_{M^n}(X)\geqslant i$, 则由引理 4 知 $\text{cat}_{M^n}(Y)\geqslant i$, 即 $Y\in M_i$, 满足了引理的论断. 引理得证. □

因此 M_i 为 $\Theta(M^n)$ 中的闭子集.

设固定一个类 M_i, 并设 $X\in M_i$. 考虑 $\lambda_i=\inf\limits_{X\in M_i}(\max\limits_{x\in X}f(x))$. 这样定义的数 λ_i 再一次给出由二次型的定理 (见前面) 的相应定理.

以 N 表示 M^n 的畴数: $\text{cat}(M^n)=N$. 显然, $N<\infty$. 由类 M_i 的定义知, $\Theta=M_0=M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots\supseteq M_N$. 这里的 $\Theta=M_0=\{X\in\Theta;\text{cat}_{M^n}(X)\geqslant 0\}$; 自然, 对任意 $X\in\Theta$ 有 $\text{cat}_{M^n}(X)\geqslant 0$. M_0 与 M_1 相等也是显见的; 特别, $\lambda_0=\lambda_1$. 类 M_N 包含了 M^n. 子集链在 M_N 处中止.

流形 M^n 上的每个光滑函数定义了函数组 $f_0,f_1,\cdots,f_N$, 其中的 $f_i(0\leqslant i\leqslant N)$ 由公式 $f_i(X)=\max\limits_{x\in X}f(x)$, 其中 $X\in M_i$ 定义为集合 M_i 上的一个函数. 于是 $\lambda_i=\inf\limits_{X\in M_i}(f_i(X))$. 因为 $M_i\supseteq M_{i+1}$, 则随 i 增大数 λ_i 只能增大: $\lambda_0=\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_N$, 其中的 $N=\text{cat}(M^n)$. 因为类 $M_i\subset\Theta$ 对于极限运算封闭 (见引理 7), 则在每个 $M_i(0\leqslant i\leqslant N)$ 中存在元素 X_i^0 使得 $f_i(X_i^0)=\lambda_i$. 换句话说, X_i^0 为 M^n 中那样的闭子集, 使 $\lambda_i=\max\limits_{x\in X_i^0}f(x)$.

引理 8 考虑水平曲面 $f_{\lambda_i}=\{x\in M_n|f(x)=\lambda_i\}$. 于是在曲面 f_{λ_i} 上至少存在函数 f 的一个临界点.

证明 设若相反, 在曲面 f_{λ_i} 没有函数 f 的临界点. 考虑类 M_i, 并设 $X_i^0\in M_i$ 为 M^n 中的闭子集, 使得 $\max\limits_{x\in X_i^0}(f(x))=\lambda_i$, 即 $f_i(X_i^0)=\lambda_i$. 由 X_i^0 的闭性, 存在点 $x_i^0\in X_i^0$, 使得 $f(x_i^0)=\lambda_i$, 即 $x_i^0\in f_{\lambda_i}$. 因为按假设条件, $\operatorname{grad}f(x)\neq 0$ 对任意 $x\in f_\lambda$ 成立, 故而 (由 M^n 的紧性) 存在曲面 f_{λ_i} 沿着向量场 $(-\operatorname{grad}f)$ 的积分轨线的充分小的形变 (我们假定在 M^n 上已给出了一个黎曼度量), 使此形变在函数 f 的值小于 λ_i 的区域中 (见图 90).

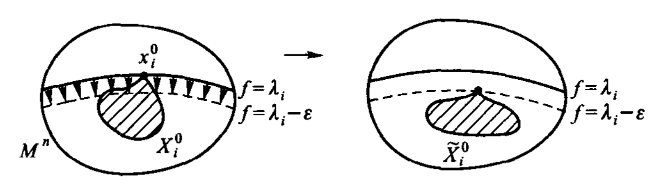


图 90

因为 M^n 为紧光滑流形, 故存在 M^n 自身的光滑同痕, 它在夹层 $\lambda_i-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant\lambda_i$ 的小邻域外为恒同, 并将 $\{f=\lambda_i\}$ 变为 $\{f=\lambda_i-\varepsilon\}$. 设 $\widetilde{X}_i^0$ 为子集 X_i^0 在这个形变下的像. 因为 $\widetilde{X}_i^0$ 由 X_i^0经在 M^n 中的同伦得到, 故由引理知 $\operatorname{cat}_{M^n}(\widetilde{X}_i^0)\geqslant\operatorname{cat}_{M^n}(X_i^0)$ (事实上等号成立). 因此, $\operatorname{cat}_{M^n}(\widetilde{X}_i^0)\geqslant i$, 即 $\widetilde{X}_i^0\in M_i$. 由此得到 $\sup\limits_{x\in\widetilde{X}_i^0}f(x)\leqslant\lambda_i-\varepsilon<\lambda_i$, 而这意味着 $\inf\limits_{X\in M_i}(\sup\limits_{x\in X}f(x))\leqslant\sup\limits_{x\in\widetilde{X}_i^0}f(x)\leqslant\lambda_i-\varepsilon<\lambda_i$, 按 λ_i 的定义, 这是不可能的. 引理得证. □

引理 9 假设 $\lambda_i=\lambda_{i+p}$, 其中 $p>0$. 以 S 表示在水平曲面 $f_{\lambda_i}=\{f=\lambda_i\}$ 上函数 f 的临界点集合. 于是有 $\operatorname{cat}_{M^n}(S)\geqslant p+1$.

注 在我们进行这个引理的证明之前, 留意一下函数 $\langle Bx,x\rangle$ 在球面 S^{n-1}上临界点的类似行为: 如果 $\lambda_i=\lambda_{i+p}$, 则椭球形式 B 是绕特征方向 $e_i,e_{i+1},\cdots,e_{i+p}$ 的旋转椭球; 它给出了函数 f 的临界点集, 显然同胚于球面 S^p.

证明 因为 S 为闭, 故存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\operatorname{cat}_{M^n}(S)=\operatorname{cat}_{M^n}(U_\varepsilon S)$ (见引理 5). 设若相反: $\operatorname{cat}_{M^n}(S)\leqslant p$. 考虑类的链 $M_i\supset M_{i+1}\supset\cdots\supset M_{i+p}$. 设 $X_{i+p}^0\in M_{i+p}$ 为闭子集, 使 $\sup\limits_{x\in X_{i+p}^0}f(x)=\lambda_{i+p}=\lambda_i$. 再考虑闭集 $X^0=\overline{X_{i+p}^0\setminus(X_{i+p}^0\cap U_\varepsilon S)}$ (见图 91).

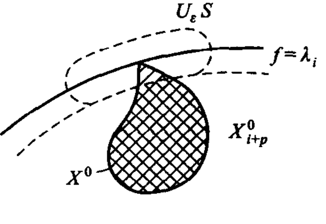


图 91

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{cat}_{M^n}(X^0) &\geqslant \mathrm{cat}_{M^n}(X^0_{i+p}) - \mathrm{cat}_{M^n}(X^0_{i+p}\cap U_\varepsilon S)\\ &\geqslant \mathrm{cat}_{M^n}(X^0_{i+p}) - \mathrm{cat}_{M^n}(U_\varepsilon S)\\ &= \mathrm{cat}_{M^n}(X^0_{i+p}) - \mathrm{cat}_{M^n}(S)\\ &\geqslant i+p-p=i.\end{aligned}$$

因此, $\mathrm{cat}_{M^n}(X^0)\geqslant i$, 即 $X^0\in M_i$, 又,

$$\lambda_i=\lambda_{i+p}=\sup_{x\in X^0_{i+p}} f(x)\geqslant \sup_{x\in X^0} f(x)\geqslant \lambda_i=\lambda_{i+p}=\sup_{x\in X^0_{i+p}} f(x).$$

故而证明了 $\sup\limits_{x\in X^0} f(x)=\lambda_i$, 于是可以认为集合 X^0 是类 M_i 中的一个紧子集 X^0_i. 另一方面, 由 X^0 的构造得到 $X^0_i\cap S=\varnothing$ (其中 $X^0=X^0_i$). 由引理 8 知 X^0_i 至少应该包含一个临界点 $x^0_i\in S$ (即在曲面 f_{λ_i} 上), 故得出矛盾, 从而证明了引理. □

定理 1 的证明 设 $f(x)$ 为紧光滑流形 M^n 上的光滑函数. 想要证明函数 f 的不同临界点的个数不小于 $\mathrm{cat}(M^n)$. 我们考虑集合类的链: $\Theta=M_0=M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_N, N=\mathrm{cat}(M^n)$. 先研究 $\lambda_0=\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_N$, 即在 $i\neq j$ 时 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 的情形, 其中 $1\leqslant i,j\leqslant N$. 于是由引理 8, 在每个水平面 $f_{\lambda_i}, 1\leqslant i\leqslant N$ 上, 至少存在一个函数 $f(x)$ 的临界点; 因而 (由于各曲面 f_{λ_i} 的临界点互不相同, $1\leqslant i\leqslant N$), 那么不同的临界点个数不小于 $N=\mathrm{cat}(M^n)$. 因此由于 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 的假定 $(1\leqslant i,j\leqslant N)$, 定理在这种情形下得证.

现在考虑一般情形: 设在 $\{\lambda_i\}$ 中有重合的数, 譬如 $\lambda_i=\lambda_{i+p}$. 那么在曲面 $f_{\lambda_i}=f_{\lambda_{i+p}}$ 上到底可以选出多少个不同的临界点? 由引理 9 知道有 $\mathrm{cat}_{M^n}(S)\geqslant p+1$, 故在 S 上至少可以选出 $p+1$ 个不同的临界点 ($S=\bigcup\limits_{\alpha=1}^{p+1}S_\alpha$, 其中的每个 S_α 在 M^n 上都收缩为一个点; 只须在每个 S_α 上选一个点就够了). 于是 "单重" 的值 λ_j (即是 $\lambda_{j-1}<\lambda_j<\lambda_{j+1}$ 那样的 λ_j) 至少给出了一个临界点, 而每个 "$(p+1)$ 重" 值 λ_i (即 $\lambda_{i-1}<\lambda_i=\lambda_{i+1}=\cdots=\lambda_{i+p}<\lambda_{i+p+1}$) 便至少贡献出了 $(p+1)$ 个临界点. 定理的一般情形得证. □

从这个证明中可清楚看出, 对于 M^n 上光滑函数的分岔点也成立类似的论断. 对证明细节的讨论, 我们留给读者.

转而研究具体的例题. 第一个应该研究的问题是, 是否上面得到的估计是最好的 (在一般情形中), 就是说, 是否存在这样的函数 f 和这样的流形 M^n, 使它的临界点数正好等于 $\mathrm{cat}(M^n)$. 最简单的例子已表明这样的偶对 (M^n,f) 存在.

命题 2 设 M^2 为二维光滑紧闭流形. 于是如果 M^2 同胚于 S^2, 则 $\mathrm{cat}(M^2)=2$, 如果 M^2 不同胚于球面则 $\mathrm{cat}(M^2)=3$.

证明 如果 M^2 同胚于球面则结论显然正确. 现设 M^2 与 S^2 不同胚. 考虑 M^2 的形如 $\sigma^0\cup(\bigcup_{\alpha=1}^{q}\sigma^1_\alpha)\cup\sigma^2$ 的胞腔剖分, 即圆束 $\bigvee_{\alpha=1}^{q}S^1_\alpha$ 附加了一个二维胞腔 σ^2. 我们以 $U_\varepsilon(\vee S^1_\alpha)$ 表示 $\vee S^1_\alpha$ 在流形 M^2 中的充分小邻域, 并设 $\overline{D}^2=M^2\backslash U_\varepsilon(\vee S^1_\alpha)$ 为闭圆盘 (见图 92).

表示 M^2 为三个闭子集的如下并: $M^2=A_1\cup A_2\cup A_3$, 其中 $A_1=D^2$ (在其内收缩为一个点), 而 A_2 和 A_3 为图 93 所示. 这里的 $A_2=U_\varepsilon(\vee S^1_\alpha)\cap W_\eta(\sigma^0)$, 其中 $W_\eta(\sigma^0)$ 为在以点 σ^0 为中心的半径为 η 的圆盘 (假定数 η 充分小); $A_3=\overline{U_\varepsilon(\vee S^1_\alpha)\setminus A_2}$.

可清楚看出, A_2 在其自身中收缩为一点, 而 A_3 在其自身收缩为 q 个点组, 因而在 M^2 中收缩为一点. 因此命题得证. □

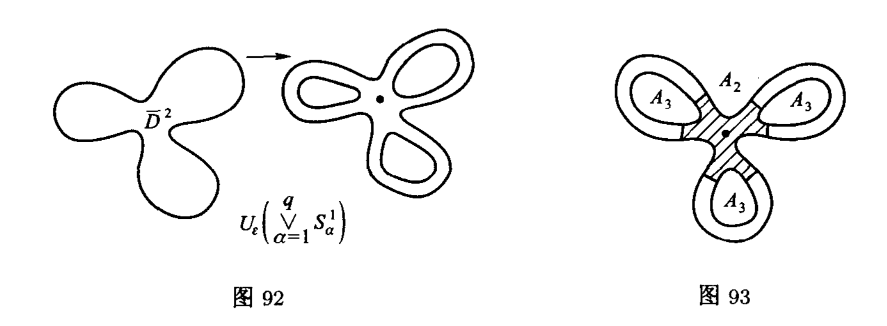


图 92　　　　图 93

容易验证, 如果 $\mathrm{cat}(M^2)=2$, 则 M^2 同胚于球面.

现在考虑 M^2 上的光滑函数 f. 对于球面 S^2, 其标准高度函数正好有两个临界点, 它等于球面的畴数. 如果 M^2 不同胚于球面, 则正如前面所证的, 在 M^2 存在光滑函数 f, 它具有三个临界点, 这个数等于畴数 $\mathrm{cat}(M^2)$. 因此, 我们证明了可以达到下界 $\mathrm{cat}(M^2)$.

$\mathrm{cat}(M^n)$ 的计算是个不平凡的问题. 要给出这个不变量的准确计算极其困难. 得出 $\mathrm{cat}(M^n)$ 的上界估值一般来说, 对于具体的流形 M^n 不算难: 只要给出任意一个具体的可缩的覆盖 $M^n=\bigcup_{i=1}^{N}A_i$ 即可. 要得到 $\mathrm{cat}(M^n)$ 的下界估值是更为复杂的问题. 现在我们给出一个对 $\mathrm{cat}(M^n)$ 下界估值的方法.

考虑上同调环 $H^*(M^n;\mathbb{Z})$ (对于环 $H^*(M^n,\mathbb{Z}_p)$, 所有下文中的构造可逐字逐句地重复). 如果数 k 是具下面性质的所有 p 中的最大的一个, 则称此数 k 为 "*流形 M^n 的上同调长*"; 这个性质是: 存在元素 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p\in H^*(M^n;\mathbb{Z})$ 使得乘积 $\alpha_1\cdot\cdots\cdot\alpha_p$ 在 $H^*(M^n;\mathbb{Z})$ 中非零. 这里所说的 "乘积" 我们理解为上同调环中通常的乘积.

命题 3 成立不等式: $\mathrm{cat}(M^n)\geqslant k+1$, 其中 k 为 M^n 的上同调长.

证明 设 $D: H^k(M^n;\mathbb{Z}) \to H_{n-k}(M^n;\mathbb{Z})$ 为庞加莱对偶, 它建立了上面这两个群之间的同构. 我们记得: 如果 $\alpha,\beta \in H^*(M^n;\mathbb{Z})$ 为两个上链, $\alpha\cdot\beta$ 为它们在环 $H^*(M^n,\mathbb{Z})$ 中的积, 则 $D(\alpha\cdot\beta) = D(\alpha)\cap D(\beta)$, 这里 $D(\alpha)\cap D(\beta)$ 表示闭链 $D(\alpha)$ 和 $D(\beta)$ 的交 (交运算对偶于上同调乘积). 为了清晰地描述, 可以把闭链 $\gamma_1 = D(\alpha)$ 和 $\gamma_2 = D(\beta)$ 表现为 M^n 中的子流形 (或带奇点的子流形). 闭链 $\gamma_1\cap\gamma_2$ 可以作为这两个子流形的交 (把它们化到一般位置之后, 见图 94). 考虑 $H^*(M^n,\mathbb{Z})$ 中的长 k 的乘积 $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\dots\cdot\alpha_k \neq 0$, 并设 $\gamma_i = D(\alpha_i), 1\leqslant i\leqslant k$. 于是 $D(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\dots\cdot\alpha_k) = \gamma_1\cap\gamma_1\cap\dots\cap\gamma_k = \gamma$, 其中闭链 γ 不同调于 0(记住 D 为同构). 现在假定 $\mathrm{cat}(M^n)\leqslant k$. 这表明, 存在那样的闭子集 $A_1,\cdots,A_s (s\leqslant k)\subset M^n$, 使得 $M^n = \bigcup\limits_{i=1}^{s} A_i$, 并且每个 A_i 在 M^n 中收缩为一个点. 不失一般性; 可设 $M^n = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, 其中所有 A_i 都收缩为点. 这只要将 $A_{s+1},\cdots,A_k$ (如 $s<k$) 取为任意 $(k-s)$ 个 M^n 中的点就可以了. 进而可设 $s=k$. 我们把每个闭链 $\gamma_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 与子集 A_i 相对应. 因为 A_i 在 M^n 中收缩为点, 故 $H_*(M^n,\mathbb{Z})$ 被嵌入到 $H_*(M^n\setminus A_i;\mathbb{Z})$ 中 (其中 $*>0$).

我们由此得到, 每个 γ_i 同调于 $\widetilde{\gamma}_i\subset M\setminus A_i, 1\leqslant i\leqslant k$ (即这里的 γ_i 可能会与子集 $A_i\subset M$ 相连). 然而在这种情形中, $\bigcap\limits_{c=1}^{k}\widetilde{\gamma}_i$ 一方面同调于 $\cap\gamma_i=\gamma$, 另一方面, $\bigcap\limits_{i=1}^{k}\gamma_i\subset\bigcap\limits_{c=1}^{k}(M\setminus A_i) = M\setminus(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i)$, 并且由于 $M=\bigcup\limits_{c=1}^{k}A_i$, 故其为空集. 这表明 γ 同调于零, 与定理的条件相矛盾. 证完. □

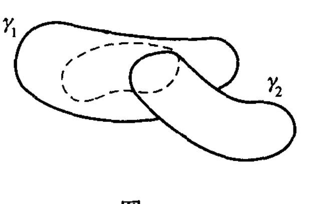


图 94

我们来应用这个所证的命题去计算 $\mathrm{cat}(M^n)$. 例如, 如果二维紧闭流形 M^2 不同胚于球面, 则 $\mathrm{cat}(M^2)\geqslant 3$. 其证明立即由已经知道的关于 $H^*(M^2;\mathbb{Z})$ 和 $H^*(M^2,\mathbb{Z}_2)$ 的结构的信息得到.

我们将证明 $\mathrm{cat}(\mathbb{R}P^n) = n+1$. 首先得出上界的估值: $\mathrm{cat}(\mathbb{R}P^n)\leqslant n+1$. 考虑标准分解 $\mathbb{R}P^n = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} A'_i$, 其中 A'_i 为开的 n 维圆盘, 定义为 $A'_i = \{\lambda(x^1,\cdots,x^i,\cdots,x^{n+1}); x^i\neq 0\}$, 其中 $\{x^\alpha\}$ 有 $1\leqslant\alpha\leqslant n+1$ 为 $\mathbb{R}P^n$ 上的齐次坐标 (参看 [1], 卷 II, §2). 因为集合 $\{A'_i\}$ 为 $\mathbb{R}P^n$ 的开覆盖, 故而在每个 A'_i 可内接一个闭圆盘 A_i, 使其并如前面的 A'_i 一样组成了 $\mathbb{R}P^n$ 的覆盖 (只需稍许小于圆盘 A'_i 即可). 因为每个 A_i 自身收缩为一点, 故我们得到想要的上界.

现在证明 $\mathrm{cat}(\mathbb{R}P^n)\geqslant n+1$. 为此只要证明 $\mathbb{R}P^n$ 的上同调长 (具系数群 $\mathbb{Z}_2$) 等于 n. 事实上, $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2[x_1]/(x_1^{n+1})$, 即这个上同调环同构于 x_1 的截尾多项式环 (x_1 的次数为 1); 以 (x_1^{n+1}) 表示由元 x_1^{n+1} 生成的理想. 于是乘积

$x_1^n = x_1 \cdot \cdots \cdot x_1 (n$ 个因子) 不为零. 因此, $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n+1$.

我们将证明 $\text{cat}(T^n) = n+1$, 其中 T^n 为 n 维环面. 因为 $H^*(T^n,\mathbb{Z}) = \wedge(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为一次生成元 $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 的外代数, 则乘积 $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ 不等于零, 从而有 $\text{cat}(T^n) \geqslant n+1$. 再证明 $\text{cat}(T^n) \leqslant n+1$. 因为 $T^n = S^1 \times T^{n-1}$, 故 T^n 可以表示为 $T^n = (S^1 \vee T^{n-1}) \cup \sigma^n$, 我们有一个一般性的论断: 如果 $\text{cat}(X) \geqslant 2$, 则 $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}X$, 其中 $X \vee S^n$ 为球面 S^n 和任意一个道路连通的胞腔复形的 "束". 事实上, 设 $\text{cat}(X) = k$, 从而 $X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, 其中每个 A_i 在 X 中收缩为点. 设 $x_0 \in X$ 为那个束的胞腔连接点: $X \bigvee_{x_0} S^n$.

将 S^n 表示为两个闭圆盘的并: $S^n = D_1^n \cup D_2^n$, 其中 $x_0 \in D_1^n$ 而 $x_0 \notin D_2^n$. 考虑那个有 $x_0 \in A_{i_0}$ 的 A_{i_0}, 并令 $B_\alpha = A_\alpha, \alpha \neq i_0$ 和 $\alpha \neq j_0$, 其中的 j_0 为任一个不同于 i_0 的某个固定指标, 又 $B_{i_0} = A_{i_0} \cup D_1^n, B_{j_0} = A_{j_0} \cup D_2^n$. 我们还注意到有 $A_{j_0} \cap D_2^n = \varnothing$ (见图 95).

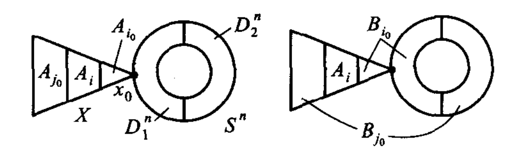


图 95

因此, $X \vee S^n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, 每个 B_i 在 $X \vee S^n$ 中收缩为点. 因而 $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}(X)$. 我们把下面更一般的论断的证明作为练习题留给读者: $\text{cat}(X \vee Y) = \max(\text{cat}(X), \text{cat}(Y))$, 其中 X 和 Y 为任意道路连通空间. 公式 $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}X$ (如果 $\text{cat}X \geqslant 2$) 是这个论断的特殊情形. 转向 $\text{cat}(T^n)$ 的计算. 我们有 $\text{cat}(T^n) = \text{cat}((T^{n-1} \cup S^1) \vee \sigma^n) \leqslant \text{cat}(T^{n-1} \vee S^1) + 1$. 因为 $\text{cat}(T^{n-1} \vee S^1) = \text{cat}(T^{n-1})$ 和 $\text{cat}(T^2) = 3$, 那么由归纳得到 $\text{cat}(T^{n+1}) \leqslant n+1$, 这即所求.

设 $p: E \to B$ 是纤维为 F 的在塞尔意义下的纤维丛, 即满足覆叠同伦公理.

命题 4 成立不等式: $\text{cat}(E) \leqslant \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat(B)}$, 其中 $F \subset E$ 为纤维丛 $P.: E \to B$ 的纤维.

证明 所要的命题可作为更一般命题的特殊情形得到. 这个一般性定理是: 设 $Y \subset B$ 为底空间 B 中的闭子集, 而 $p^{-1}(Y) \subset E$ 为其在 E 中的完全逆像; 于是成立不等式 $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leqslant \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(Y)$. 显然, 令 $B = Y$, 我们便能得到所要的命题.

先考虑 $\text{cat}_B(Y) = 1$ 的情形. 应验证不等式 $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leqslant \text{cat}_E(F)$. 将 Y 在 B 中缩为一个点, 则我们由覆叠同伦公理, 可以用 E 中子集 $p^{-1}(Y)$ 到纤维中的形变去覆叠 Y 在 B 中的形变. 于是由引理 4 得到 $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leqslant \text{cat}_E(F)$.

这即为所求.

现在考虑一般情形: 设 $\mathrm{cat}_B(Y) = k$. 于是 $Y = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, 其中每个 A_i 在 B 中收缩为点. 令 $\widetilde{Y} = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, A = A_k$; 于是 $Y = \widetilde{Y} \cup A$, 其中 $\mathrm{cat}_B(\widetilde{Y}) \leqslant k-1, \mathrm{cat}_B(A) = 1$. 要求证明不等式 $\mathrm{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y} \cup A)) \leqslant \mathrm{cat}_E(F) \cdot \mathrm{cat}_E(\widetilde{Y} \cup A)$. 我们有

$$\mathrm{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y} \cup A)) = \mathrm{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y}) \cup p^{-1}(A)) \leqslant \mathrm{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) + \mathrm{cat}_E(p^{-1}(A)).$$

所要的不等式可由下面不等式推出:

$$\mathrm{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) + \mathrm{cat}_E(p^{-1}(A)) \leqslant \mathrm{cat}_E(F) \cdot \mathrm{cat}_B(\widetilde{Y} \cup A) = k \cdot \mathrm{cat}_E(F).$$

因为 $\mathrm{cat}_E(p^{-1}(A)) \leqslant \mathrm{cat}_E(F)$ (A 在 B 中收缩为一点), 于是只要证明更强的不等式

$$\mathrm{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) + \mathrm{cat}_E(F) \leqslant \mathrm{cat}_E(F) \cdot k,$$

即

$$\mathrm{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) \leqslant \mathrm{cat}_E(F) \cdot (k-1)$$

就可以了. 因为 $\mathrm{cat}_B(\widetilde{Y}) \leqslant k-1$, 那么这个不等式又可由更强的不等式

$$\mathrm{cat}_E(p^{-1}(\widetilde{Y})) \leqslant \mathrm{cat}_E(F) \cdot \mathrm{cat}_B(\widetilde{Y})$$

推出. 但是由对 $\mathrm{cat}_B(Y)$ 进行归纳的归纳假定 (其第一步归纳 $\mathrm{cat}_B(Y) = 1$ 已在前面检验过), 这后一个不等式是满足的. 命题得证. □

存在纤维丛 $p : E \xrightarrow{F} B$ 使不等式 $\mathrm{cat}(E) \leqslant \mathrm{cat}_E(F) \cdot \mathrm{cat}(B)$ 变为等式. 例如, 考虑霍普夫丛: $p : S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$. 这时得到 $2 = 1 \cdot 2$; 这是因为 $\mathrm{cat}(S^2) = 2, \mathrm{cat}(S^3) = 2, \mathrm{cat}_{S^3}(S^1) = 1$ (纤维 S^1 在 S^3 中收缩为一点).

§20. 临界流形和莫尔斯不等式. 有对称性的函数

在流形 M^n 上光滑函数 f 的退化临界点的重要的是那个被称做 "**非退化临界流形**" 的情形. 它表示: a) 方程 $\mathrm{grad} f = 0$ 应给出一组光滑子流形 $W_k \subset M^n$, 维数分别为 α_k; b) 另外要求在子流形 W_k 的任意点处, 微分 $d^2 f$ 为秩是 $n - \alpha_k$ 的二次型, 即 $d^2 f$ 在 M^n 的某个黎曼 (正) 度量下, 在 W_k 对 M^n 的法向量的线性空间中非退化.

如果在流形上有李群作用, 并且这个函数在这个群的变换下不变, 则在此情下, 这个函数便满足上述要求. 另一个这种函数 f 的例子由在使流形降维的映射 $M \xrightarrow{\psi} M^{n-q}$ 下得到的, 即如果 ψ 的秩为 $n-q$ 时, 对 M^{n-q} 上的莫尔斯函数 $g(x)$ 有 $f(x) = g(\psi(x))$.

定义 1 称形式 d^2f 的负平方的个数 λ 为连通临界流形 W_k 的指数 (由于 d^2f 在法平面上的非退化性, 故 λ 与 W_k 中的点无关).

就像在本章 §16 中那样, 临界流形的基本不变量 (假定在一个水平面上只有一个连通的临界流形) 是局部贝蒂数, 即相对同调群的秩:

$$b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j) = \mathrm{rank}(H_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j)),$$

其中 M_a 为小于值的区域: $f(x) \leqslant a; W_j$ 为在水平面 $f(x) = a_j$ 上的临界流形. 像在 §16 中那样, 有

$$\sum_j b_k(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) \geqslant b_k(M^n).$$

在非退化临界流形的情形中, 如果知道了这些临界流形 W_j 的拓扑和它们的指数 λ_j, 则这些不等式仍然有效.

定理 1 a) 成立等式

$$b_k(W_j) = b_{k+\lambda_j}(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) \tag{1}$$

(取 mod2 贝蒂数).

b) 如果流形 M^n 定向, 并且临界流形 W_j 单连通, 则等式 (1) 对于实系数群 $\mathbb{R}$ 下的贝蒂数也成立.

对于定理的证明, 应该更清晰地表现出相应的临界流形 $W_j \subset M^n$ 的拓扑图像. 以 $U(W_j)$ 表示流形 W_j 的充分小的 $\varepsilon-$ 邻域, 它微分同胚于法丛

$$U(W_j) \xrightarrow{p} W_j,$$

其纤维为圆盘 D^{n-a_j}, 其半径为 ε (参看 [1], 卷 II, §7). 在每个纤维中, 即在任意点 $x \in W_j$ 的法平面 $\mathbb{R}_x^{n-a_j}$ 中, 二次型 d^2f 有维数 a 的正子空间 R_x^t 和维数 b 的负子空间 R_x^-, 其中 $b = \lambda_j, a + b = n - a_j$. 我们有对 W_j 的法空间的直和分解

$$\mathbb{R}_x^{n-a_j} = R_x^+ \oplus R_x^-, b = \lambda_j = \dim R_x^-.$$

在纤维为 R_x^- 的丛的每个纤维中的零点为中心, 半径为 ε 的区域的并被记为 $U^{-1}(W_j)$, 而在以 R_x^+ 为纤维的丛中的记为 $U^+(W_j)$. 我们有自然的包含映射

$$U^-(W_j), U^+(W_j) \subset U(W_j) \subset M^n.$$

函数 f 在 $U^-(W_j)$ 上的限制在这个 $W_j \subset U^{-1}(W_j)$ 上有极大值, 这里 W_j 是作为零截影嵌入 $U^{-1}(W_j)$ 的 (即在每个纤维 R_x^- 取 0). 完全类似于本章 §15 的定理, 证明了

引理 1 对于小的 $\delta>0$, 我们假设 $[a_j-\delta, a_j+\delta]$ 中对应的水平面上除去 W_j 外没有其他的临界点, 则流形 $M_{a_j+\delta}$ 收缩到复形 $M_{a_i-\delta}\cup U^-(W_j)$, 其中用了某个映射 $\varphi:\partial U^{-1}(W_j)\to M_{a_j-\delta}$ 进行了附加.

证明 引理的证明重复了 §15 的讨论. 代替附加一个胞腔 σ^{λ_i} 到指数为 λ_i 的孤立非退化临界点 x_j 上, 在这里则是附加整个流形 $U^-(W_j)$ 到临界流形 W_j 上, 其中按定义, $U^{-1}(W_j)$ 代表了胞腔 σ^{λ_j} 的 α_j- 参数 (参数为 W_j 中的点) 族, 其中 λ_j 为临界流形 W_j 的指数. §15 的关于约化函数 f (局部地) 为二次型的引理 1, 对于 §15 的结果并不具有本质性. 更重要的是, 由于形式 d^2f 的非退化性, 从而形式 d^2f 决定了函数 f 的水平曲面在临界点附近的拓扑结构; 这是显而易见的. 在所给的情形中, 在 W_j 的整个法平面上形式 d^2f 的非退化性保证了函数 f 的水平面在区域 $U(W_j)$ 中的全部拓扑性质完全类似于 §15 的情形. □

边缘 $\partial U^-(W_j)$ 是以球面 S^{λ_j-1} 为纤维的丛. 这是依赖于参数的胞腔 σ^{λ_j} 其边缘的族, 其中的参数取遍 W_j 中所有点. 以 D^{λ_j} 和 S^{λ_j-1} 为纤维的丛 U^- 和 ∂U^- 可能是非平凡的. 如果底空间 W_j 为单连通, 则这些丛是定向的 (由于单连通性, W_j 本身是定向的). 就是说, 这会在定理的 b) 的证明中是有用的.

注 实际上可以在定理的叙述中把 b) 的条件直接换成 W_j 和 $U^{-1}(W_j)$ 的定向性.

我们来证明下面的论断.

引理 2 设 $U^-(W_j)$ 为以 D^{λ_j} 为纤维, W_j 为底的丛. 对 $(U^-,\partial U^-)$ 的相对 (上) 同调有等式 (系数群为 $\mathbb{Z}_2$):

$$\begin{aligned} H^{\lambda_j+q}(U^-,\partial U^-)&=H^q(W_j),\\ H_{\lambda_j+q}(U^-,\partial U^-)&=H_q(W_j). \end{aligned} \tag{2}$$

如果 U^- 和 W_j 为定向, 则等式 (2) 对 $G=\mathbb{R},\mathbb{Z}$ 也成立.

证明 我们有庞加莱对偶的同构 (参看 §18):

1) $D_U:H^q(U^-)\cong H_{a_j+\lambda_j-q}(U^-,\partial U^-)$ (参看习题 4);

2) $D_W:H_q(W_j)\cong H^{\alpha_j-q}(W_j)$ (参看定理 18.1)(W_j 的维数为 α_j, U^- 的维数为 $\alpha_j+\lambda_j$).

考虑复合 D_UD_W. 我们得到同构

$$D_UD_W:H_q(W_j)\cong H_{\lambda_j+q}(U^-,\partial U^-).$$

因为 $H_*(U^-)\cong H_*(W_j)$, 故引理得证. □

由 §5 的定理 4, 我们得到 ("切除定理", 或 "商定理")

$$H_*(M_{a_j-\delta}\bigcup_{\varphi}U^-, M_{a_j-\delta}) = H_*(U^-, \partial U^-).$$

因为 $H_*(M_{a_j+\delta}, M_{a_j-\delta}) = H_*(U^-, \partial U^-)$, 由引理 1,2 得到定理的证明. □

例 1 设给出了 $\mathbb{R}^3$ 中绕 $z-$ 轴的旋转曲面 M^2, f 为其高度函数 (M^2 的坐标 z). 临界流形 W_j 为圆 S^1, 其中 $a_j = 1$, 数 λ_j 或零 (局部极小) 或 1 (局部极大). 也可能是孤立的临界点 (局部极小或极大), 这发生在 z 轴上.

例 2 考虑底为球面 S^n 的下列纤维丛 (参看 [1], 卷 II, §24):

1) $SO(n+1) \xrightarrow{p} S^n$ (纤维为 $SO(n)$);

2) $U(n) \xrightarrow{p} S^{2n-1}$ (纤维为 $U(n-1)$);

3) $Sp(n) \xrightarrow{p} S^{4n-1}$ (纤维为 $Sp(n-1)$).

在球面 S^n, S^{2n-1}, S^{4n-1} 上选取函数 $g(x)$ 使它有一个极小 x_0 和一个极大 x_1. 在从 1),2),3) 的丛的空间上有函数

$$f(x) = g(p(x)).$$

对 f 我们有两个临界流形 $W_0 = p^{-1}(x_0)$ 和 $W_1 = p^{-1}(x_1)$, 指数 $\lambda_1 = n$ (或分别为 $2n-1, 4n-1$) 及 $\lambda_0 = 0$ (极大). 由定理 1 得到

$$\begin{aligned} &b_j(SO(n+1)) \leqslant b_{j-n}(SO(n)) + b_j(SO(n));\\ &b_j(U(n)) \leqslant b_{j-(2n-1)}(U(n-1)) + b_j(U(n-1));\\ &b_j(Sp(n)) \leqslant b_{j-(4n-1)}(Sp(n-1)) + b_j(Sp(n-1)).\end{aligned} \tag{3}$$

请验证, 这里所有 W_j 和 $U^{-1}(W_j)$ 为定向 (参看对上面定理证明的附注), 以及不等式 (3) 不仅对 $G = \mathbb{Z}_2$ 成立而且对 $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ 也对.

习题 1 证明当 $j < n$ 时对 $SO(n+1)$ 不等式 (3) 为等式, 当 $j < 2n-1$ 时对 $U(n)$, 以及 $j < 4n-1$ 对 $Sp(n)$ 也为等式.

从 §7 的更精细的结果得出, 对 U 和 Sp 不等式 (3) 对所有 j 均为等式. 更难的是证明当 $G = \mathbb{Z}_2$ 时, 对 SO 而言 (3) 总是等式, 而对 $G = \mathbb{R}$ 则当 n 为奇数时为等式.

例 3 考虑齐性黎曼空间 M^n, 其运动群为 D, 其中 $M^n = D/H, H$ 为点 x_0 的平稳子群, $Hx_0 = x_0$.

考虑函数 $f(x) = \rho^2(x, x_0)$, 其中 $\rho(x, x_0)$ 从点 x_0 到点 x 的黎曼距离. 显然, 函数 $f(x)$ 对子群 H 不变: $f(Hx) = f(x)$.

习题 2 研究对 $M^n = SO(n)$, 或 $U(n), Sp(n)$ 的函数 $f(x) = \rho^2(x,1)$ 的临界流形.

提示. 这里的度量 ρ 是双边不变的, 其运动群为 $D = SO(n) \times SO(n)$:

$$D : x \to g_1 x g_2^{-1}, (g_1, g_2) \in D.$$

函数 $f(x)$ 对于变换子群 $H = SO(n) = (g, g) \subset D$ 不变, 这是因为当 $x_0 = 1$ 时我们有 $g x_0 g^{-1} = x_0$. 因此函数 $\rho^2(x,1) = f(x)$ 对于内自同构不变: $f(gxg^{-1}) = f(x)$.

例 4 设 Q 为李群, $T : Q \to GL(n, \mathbb{R})$ 为它的矩阵表示. 特征表示定义为 $\chi_T(x) = \mathrm{tr}(Tx), x \in Q$. 我们注意到, 特征 $\chi_T(x) = f(x)$ 给出了另一个对于内自同构不变的函数: $f(gxg^{-1}) = f(x)$.

习题 3 研究对 $Q = SO(n), U(n)$ 或 $Sp(n)$ 的函数 $f(x)$ 的临界流形和它们的不可约表示. 考虑 $Q = SO(3), SO(4), SU(3)$. 对于群 $SO(2)$, 所有非平凡的实不可约表示为 2 维并且有形状

$$T_n(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & \sin(n\varphi) \\ -\sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix},$$
$$f_n(\varphi) = \chi_T(\varphi) = 2\cos(n\varphi).$$

在考虑例 3 和例 4 的问题时, 首先分析对 $SO(n), U(n), SU(n)$ 的内自同构群的轨道是有用的. 对群 $SO(3)$ 和群 $SU(2) = Sp(1)$ 而言, 情况是简单的.

习题 4 证明上述内自同构群的所有轨道除中心外都是 S^2 (对 $SO(3)$ 中心为 1, 对 $SU(2) = Sp(1)$ 中心为 $(1, -1)$). 经中心的轨道为单点.

对于群 $U(n)$, 每个矩阵 $A \in U(n)$ 可以用内自同构 $A \to gAg^{-1}, g \in U(n)$ 对角化. 对于对角形矩阵, 显然它们完全依赖于那些重合的特征值的不同组, 即带重数的重根的不同组.

设矩阵被分解为块状:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}} & & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix}} & 0 \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

其中 $\lambda_j = \exp(2\pi i\varphi_j)$, 且 λ_j 出现了 l_j 次, $l_1 + \cdots + l_k = n$.

习题 5 证明形如 (4) 的矩阵 A, 其轨道 gAg^{-1} 为 $U(n)/(U(l_1)\times\cdots\times U(l_k))$.

当所有特征值都不同时: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$, 我们得到了一般位置的轨道. 在这种情况下 $U(l_i) = U(1) = S^1$, 从而轨道具有形状

$$U(n)/(U(1)\times\cdots\times U(1)) = U(n)/T^n.$$

因此, 在这些例子中, 我们得到了具连续对称性的函数: 以群 Q 变换 $M^n \to M^n$ 使函数 f 保持不变: $f(gx) = f(x)$. 群的不同轨道相互不微分同胚; 故而商空间 $M \xrightarrow{p} M/Q$ 不是流形. 尽管函数 $f(x)$ 可以由 M/Q 上某个函数 φ 作为 $f(x) = \varphi(px)$ 得到, 然而因为这个空间 M/Q 不是流形, 故而不能利用 M/Q 上莫尔斯型的不等式.

例 5 可由所谓的晶体群 (参看 [1], 卷 I, §20) 得到具离散群 Q 的这类有意思的例子. 设 K 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的运动群 G_n 的连通分支的某个离散子群 (对于 $n = 3$ 即为晶体群). 根据已知定理 (参看 [1], 卷 I, §20), 在群 K 中存在正规子群 N, 其具有有限指数, 它由平移构成. 群 G_n 为 $SO(n)$ 对 $\mathbb{R}^n$ 的半直积, 其中的 $\mathbb{R}^n \subset G_n$ 为平移群, 它是正规子群, 而 $SO(n) = G_n/\mathbb{R}^n$ (参看 [1], 卷 I, §4). 离散子群 $K \subset G_n$ 和它的正规子群 $N \subset \mathbb{R}^n, N = K \cap \mathbb{R}^n$ 决定了有限商群 $D_k = K/N$, 它代表了绕 $\mathbb{R}^n$ 中不同点的所有的旋转, 但要在 K 内. 我们有紧流形: 环面 $T^n = \mathbb{R}^n/N$, (N 为秩为 n 的自由阿贝尔群) 并且有有限群 D_k 在环面 T^n 上的作用: $g \in K$ 时 $g(x) = gxg^{-1}(\mathrm{mod} N)$.

$\mathbb{R}^n$ 上对于晶体群 $K \subset G_n$ 不变的任意函数 $\tilde{f}$ 对应 (同一个) 可以看成是环面 $T^n = \mathbb{R}^n/N$ 上的函数, 以 $f(y), y \in T^n$ 表示. 这时环面 T^n 上的函数 $f(y)$ 对于有限群 D_k 的变换不变. 现在我们到达了下面的问题: 存在紧黎曼空间 M^n, 有限运动群 $D: M^n \to M^n$ 和 M^n 上的莫尔斯函数, 它对群 D 不变. 对于所给出的情形, 如何能正确决定出莫尔斯不等式?

引理 3 设 $W_d \subset M^n$ 为 M^n 中的流形, 它由元素 $d \in D, d \neq 1$ 的所有不动点集的全部连通分支组成. 将 f 限制在 W_d 上. 如果点 $x_0 \in W_d$ 为 f 在 W_d 上的临界点, 于是这个点也是 f 在整个 M^n 上的临界点.

证明 利用 M^n 上的度量将 $\xi(x) = \mathrm{grad} f(x)$ 看作 M^n 上的向量. 由度量对于运动群 D 的不变性得出, 变换 $d \in D$ 把向量 $\xi(x) = \mathrm{grad} f(x)$ 变成向量 $\mathrm{grad} f(dx): \xi(x) \to \xi(dx)$. 如果 $x \in W_d$, 则 $x = dx$. 我们把向量 $\xi(x)$ 分解为和 $\xi_1 + \xi_2 = \xi$, 其中 ξ_1 切于 W_d, ξ_2 垂直于 W_d. 显然, $d: \xi_1 \to \xi_1$. 相反, 如果 $\xi_2 \neq 0$, 则 $d(\xi_2) \neq \xi_2$. 否则流形 W_d 没有包含元素 $d \in D$ 的不动点集合的所有连通分

支: 它可按向量 ξ_2 的方向扩张. 于是向量 $\xi(x)=\xi_1(x)=\operatorname{grad}f(x)$ 切于 W_d. 引理得证. □

在研究具体流形 (M^n,D) 和函数 f 时, 对莫尔斯不等式的进一步改进则要求了解元素 $d\in D$ 的不动点集合, 以及对不同 d 的这些流形的相互关系, 还有它们的同调群在 M^n 中的嵌入同态. 特别地, 如果 x_0 是元素 $d\in D$ 的孤立不动点, 则点 x_0 是 $f(x)$ 在 M^n 上的临界点.

考虑一个元素 $d\in D, d\neq 1$, 我们得到了不动点的流形 W_d. 由对 W_d 的莫尔斯不等式, 我们对 $f_{W_d}=f|_{W_d}$ 有

$$\sum \mu_k(f_{W_d})\geqslant \sum b_k(W_d).$$

我们还注意到, 在 W_d 中临界点的指数与在 M^n 中的可能不同. 甚至当 D 为由 d 生成的 m 阶循环群时, 莫尔斯不等式还可以得到改进, 这只要知道了包含关系

$$W_d\subset W_{d^2}\subset\cdots\subset M^n=W_{d^m}, d^m=1$$

即可.

在 $D=\mathbb{Z}_2$ 的特殊情形, 元 $d\neq 1$ 时 d 的不动点流形 W_d 的维数为 $n-1$, 并把 M^n 分成两个微分同胚的部分, $M^n=M_1\cup M_2$, 其中 $\partial M_1=\partial M_2=W_d$. 元素 d 的作用为

$$\begin{aligned} &d: M_1\to M_2,\\ &d: M_2\to M_1, d\Big|_{\partial M_1}\equiv d\Big|_{\partial M_2}\equiv 1. \end{aligned}$$

考虑 (M,W) 的正合序列:

$$\xrightarrow{j_*} H_{q+1}(M_1,W)\xrightarrow{\partial} H_q(W)\xrightarrow{i_*} H_q(M_1)\xrightarrow{j_*} H_q(M_1,W)\xrightarrow{\partial}.$$

定义数

$$\bar{b}_k(M_1,W)=b_k(M_2)+\operatorname{rank}(H_k(M_1,W)/\operatorname{Im}j_*).$$

习题 6　证明函数 f 在 M_1 (包含 W) 的指数为 k 的临界点的个数不小于 $\bar{b}_k(M_1,W)$.

§21.　函数的临界点与道路空间 ΩM 的拓扑

在无穷维光滑流形 M^∞ 上, 莫尔斯理论和柳斯捷尔尼克 – 施尼雷尔曼理论之间有自然的类比. 这种无穷维流形的一个例子是逐段光滑道路空间 $\Omega(M,p,q)$, 它是在有限维流形 M 从点 p 到点 q 的道路的集合. 在流形 M^∞ 上可以考

虑函数 $F(\gamma),\gamma\in M^{\infty}$. 称这样的函数为泛函. 对于 $F(\gamma)$ 的 "临界点" 的概念是自明的, 然而 "临界点的指数" 则需要给出背景解释.

我们将不在这里引进无限维流形的理论, 而只局限于从点 p 到点 q 的道路空间 $\Omega(M,p,q)$.

设 $p,q\in M$ 为两个固定的点, $\gamma:[0,1]\to M$ 为分段光滑的道路, $\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$, 即存在一个线段 [0,1] 的分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$, 使得 $\gamma([t_i,t_{i+1}])(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 为光滑映射, 而在整个 γ 上为连续. 以 $\Omega(M,p,q)$ 表示所有这些道路的集合. 所考虑轨线 $\gamma(t),\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$ 的逐段光滑性 (而非光滑性) 原来在证明关于把空间 Ω 分解为 "胞腔" 和的定理中有着技术上的好处, 而这种分解类似于在有限情形中所进行的那种. 对于每个点 $\gamma\in\Omega(M,p,q)$, 我们有一个相关的无穷维线性空间 $T_\gamma\Omega$, 它可以自然地作为在 "点"$\gamma\in\Omega$ 的 Ω 的 "切空间".

定义 1 称沿道路 γ 的所有分段光滑的向量场 $v,v(0)=0,v(1)=0$ 为 Ω*在点* γ *的切空间* $T_\gamma\Omega$.

设 $\widetilde{\alpha}$ 为线段 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 的映射 $\widetilde{\alpha}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Omega(\varepsilon>0$ 充分小) 使得 $\gamma=\widetilde{\alpha}(0)$, 我们则称 $\widetilde{\alpha}$ 为道路 γ 在保持点 p,q 不动的对于参数 u 的变差, 其中 $-\varepsilon<u<\varepsilon$; 于是存在剖分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$, 对于 $\alpha(u,t)=\widetilde{\alpha}(u)(t)$ 定义的 $\alpha(u,t)$ 在每个区间 $t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$ 上为到 M 的光滑函数 (参看图 96).

因为对每个固定的 $u(-\varepsilon\leqslant u\leqslant\varepsilon)$, 我们得到分段光滑的道路 $\widetilde{\alpha}(u)(t)$, 故可以将 $\widetilde{\alpha}$ 看作在空间 Ω 中的轨线 (见图 97). 故可以考虑在点 $\gamma=\widetilde{\alpha}(0)$ 的轨线 $\widetilde{\alpha}(u)$ 的速度向量. 按定义, 令 $v=\dfrac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial u}(0,t)$, 场 $v=v(t)$ 是沿 $\gamma(t)$ 的分段光滑的向量场, 从而 (由切空间 $T_\gamma\Omega$ 的定义) 属于 $T_\gamma\Omega$. 容易验证其逆: 如果给出任意的场 $v\in T_\gamma\Omega$ (即沿 $\gamma(t)$ 的场 $v(t)$), 则总存在轨线 $\widetilde{\alpha}(u)\in\Omega$ 使得 $\dfrac{\partial}{\partial u}\widetilde{\alpha}(0,t)=v(t)$. 在变分法中通常记其为 $\delta\gamma$.

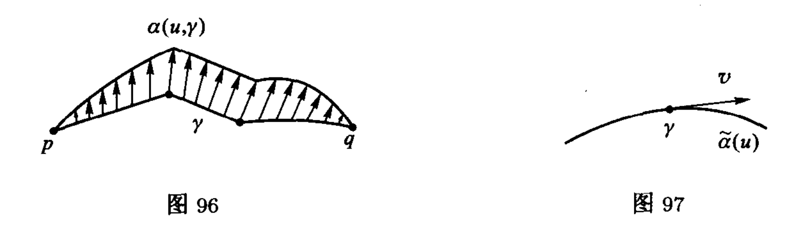


图 96　　　　图 97

设 $F(\gamma)$ 为 Ω 上的实函数. 考虑道路 $\gamma\in\Omega$ 和场 $v=\delta\gamma\in T_\gamma\Omega$. 我们假定导数 $\dfrac{\partial}{\partial u}F(\widetilde{\alpha}(u))|_{u=0}$ 存在. 在这个泛函 $F(\gamma)$ 的具体例子中, 这个导数的存在性是显见的. 我们注意到, 上面所给的导数 $\dfrac{\partial}{\partial u}F(\widetilde{\alpha}(u))$ 的定义恰恰是在有限维流形上的光滑函数的方向导数有限维的定义的翻版. 进一步按照这种相似

性, 我们给出 $F(\gamma)$ 的临界道路. 就是说, 如果对道路 γ_0 的任意变差 $\widetilde{\alpha}(u)$ 有 $\frac{\partial}{\partial u}F(\widetilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$, 则道路 $\gamma_0 \in \Omega$ 便是 $F(\gamma)$ 的临界道路 (或者说, 变分导数 $\frac{\delta F}{\delta \gamma} = 0$ 等于零).

现在我们感兴趣的只是 Ω 上具体的泛函, 即道路的作用是 $E(\gamma) = \int_0^1 \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2 dt$ 和道路的长 $L(\gamma) = \int_0^1 \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt$, 它们已在 [1], 卷 II, 第 5 章中研究过. 此时我们假设 M 为黎曼流形. 在泛函 L 和 E 之间存在后面的关系: $L^2 \leqslant E$, 同时要达到相等当且仅当 $|\dot{\gamma}| \equiv$ 常数, 即参数 t (在 $\gamma(t)$ 上) 与弧长 (自然参数) 成比例.

我们来回忆关于泛函 $L(\gamma)$ 和 $E(\gamma)$ 的变分导数的知识. 设 $\widetilde{\alpha}(u)$ 为道路 γ 的变差; $v = v(t) = \frac{\partial \widetilde{\alpha}}{\partial u}(0,t)$ 为变差 $\widetilde{\alpha}(u)$ 的向量场 $\delta\gamma$ (沿 $\dot{\gamma}(t)$); $\dot{\gamma}(t)$ 为 $\gamma(t)$ 在 t 点的速度向量; $a(t) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma})$ 为轨线的加速度向量, $\Delta\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t^+) - \dot{\gamma}(t^-)$, 即速度向量在点 t 的跳跃. 成立下面的定理 (第一变分公式): 参看 [1], 卷 I, §31.

定理 1 成立等式:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}E(\widetilde{\alpha}(u))\Big|_{u=0} = -\sum_{(t)}\langle v(t), \Delta\dot{\gamma}(t)\rangle - \int_0^1 \langle v(t), a(t)\rangle dt,$$

其中 $a(t)$ 为泛函 E 的变分导数, 它是个光滑函数.

由于道路 $\gamma(t)$ 的逐段光滑性, 我们有: 除去有限个 t 值外对所有 t 成立 $\Delta\dot{\gamma}(t) = 0$ (那些有限个点是导数的间断点).

像我们以前已经注意过的, 由第一变分公式得出下面论断.

定理 2 $\gamma_0 \in \Omega$ 为泛函 $E(\gamma)$ 的临界点当且仅当 γ_0 为测地线.

证明 如果 $\gamma_0(t)$ 为测地线, 则 $\Delta\dot{\gamma}(t) \equiv 0; a(t) \equiv 0$, 即 $\frac{d}{du}E(\widetilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$. 反之: 设 $\frac{d}{du}E(\widetilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$ 对道路 $\gamma_0(t)$ 的任意变差 $\widetilde{\alpha}(u)$ 成立. 考虑沿 $\gamma_0(t)$ 的向量场 $v(t) = g(t)a(t)$, 其中函数 $g(t) \geqslant 0$, 同时 $g(t) = 0$ 只在那些点 $t_i \in [0,1]$, 使 $\Delta\dot{\gamma}(t_i) \neq 0$. 因此,

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{du}E(\widetilde{\alpha}(u))\Big|_{u=0} = -\int_0^1 \langle a(t), a(t)\rangle g(t)dt,$$

即沿 $\gamma_0(t)$ 有 $a(t) \equiv 0$. 因为 $a(t) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}_0)$, 故表明在每个轨线的光滑区间上, $\gamma_0(t)$ 是测地线. 我们现在选 $\widetilde{\alpha}(u)$ 使 $v(t_i) = \Delta\dot{\gamma}(t_i)$; 于是

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{du}E(\widetilde{\alpha}(u))\Big|_{u=0} = -\sum_{(t_i)}\langle \Delta\dot{\gamma}(t_i), \Delta\dot{\gamma}(t_i)\rangle,$$

即 $\Delta\dot{\gamma}(t_i) = 0$ 对所有 i 成立, 因此 $\gamma_0(t)$ 为光滑轨线 (没有间断). 定理得证. □

现在回忆对泛函 E 的第二变分公式 (参看 [1], 卷 I, §36). 设 $v_1, v_2 \in T_\gamma \Omega$ 为两个向量场.

考虑双参数的变差 $\alpha : U \times [0,1] \to M$, 其中 $U(u_1, u_2)$ 为点 $(0,0) \in \mathbb{R}^2(u_1, u_2)$ 的一个开邻域; $t \in [0,1]; \alpha(0,0,t) = \gamma(t); \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0,0,t) = v_1(t), \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0,0,t) = v_2(t)$. 容易验证, 对任意一对向量场 $v_1, v_2 \in T_\gamma \Omega$, 这样的变差存在 (见图 98)

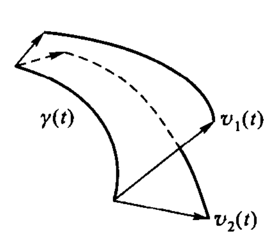


图 98

对于泛函 E, 称表达式

$$d^2E(v_1, v_2) = \frac{\partial^2 E(\widetilde{\alpha}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2}\Big|_{u_1=u_2=0}$$

为 E在临界点 $\gamma_0(t) \in \Omega$ 的黑塞 (Hesse) 形式. 这里的 $\widetilde{\alpha}(u_1, u_2)(t) = \alpha(u_1, u_2, t)$. 成立下面的泛函 E 的第二变分公式 (参看 [1], 卷 I, §36).

定理 3 设 $\gamma_0 \in \Omega$ 为测地线 (即对 $E(\gamma)$ 的临界点), $\widetilde{\alpha}(u_1, u_2)$ 为道路 γ_0 的双参数变差, $v_i = \frac{\partial \widetilde{\alpha}}{\partial u_i}(0,0), i = 1, 2$. 于是

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(\widetilde{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}\Big|_{u_1=u_2=0} = -\sum \langle v_2(t_i), \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t_i))\rangle$$
$$-\int_0^1 \langle v_2(t), \nabla_{\dot{\gamma}_0}\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t) + R(\dot{\gamma}_0, v_1)\dot{\gamma}_0\rangle dt,$$

其中 $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t^+) - \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t^-)$ 为导数 $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t)$ 在它的间断点处的一个跳跃; R 为曲率张量.

前面已证明过测地线 $\gamma_0(t)$ 没有非光滑点, 故可限制到 $\gamma_0(t)$ 的变差 $\widetilde{\alpha}$ 上, 对它 $v_1(t), v_2(t)$ 没有间断点. 那么

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(\widetilde{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}\Big|_{u_1=u_2=0} = -\int_0^1 \langle v_2, \nabla_{\dot{\gamma}_0}\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1 + R(\dot{\gamma}_0, v_1)\dot{\gamma}_0\rangle dt.$$

我们记得, 称沿测地线 γ_0 的向量场为雅可比向量场是说, 如果它满足了雅可比微分方程

$$(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0$$

(参看 [1], 卷 I, §36). 这个方程在下面的基下可方便地写出来: 我们沿 $\gamma_0(t)$ 选取 n 个 (对每个 t) 沿 γ_0 平行的法正交向量场 $e_1(t), \cdots, e_n(t)$ (即 $\nabla_{\dot{\gamma}_0} e_\alpha(t) \equiv 0$). 于是 $v(t) = v^i e_i(t)$, 并有

$$\frac{d^2 v^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^n R^i_j(t) v^j(t) = 0, R^i_j(t) = \langle R(\dot{\gamma}_0, e_j)\dot{\gamma}_0, e_i\rangle.$$

因此作为这个方程组解的雅可比场由下面所给初值唯一确定: $v(0), \nabla_{\dot{\gamma}_0} v(0) \in T_{\gamma_0(0)}(M^n)$. 现在回想沿测地线 $\gamma_0(t)$ 的共轭点的定义. 设对一对点 $A, B \in \gamma_0(t)$ 存在沿 $\gamma_0(t)$ 的非零雅可比场 $v(t)$ 使得 $v|_A = v|_B = 0$ (即场 $v(t)$ 在点 A 和 B 化为零). 称这样的点 A 和 B 沿测地线 $\gamma_0(t)$ 共轭. 称所有沿 γ_0 的这种雅可比场的线性空间的维数为*共轭点偶对 $A, B \in \gamma_0$ 的重数*.

考虑 $d^2E(v_1, v_2)$; 设 $W_{\gamma_0} \subset T_{\gamma_0}\Omega$ 为 $T_{\gamma_0}\Omega$ 的线性子空间, 它由对任意 $v_2 \in T_{\gamma_0}\Omega$ 满足 $d^2E(v_1, v_2) \equiv 0$ 的所有向量场 v_1 组成. 常说子空间 W_{γ_0} 为在点 $\gamma_0 \in \Omega$ 的黑塞形式 d^2E 的零子空间, 或者黑塞形式 d^2E 的核. 称 $\dim W_{\gamma_0}$ 为 (在临界点 $\gamma_0 \in \Omega$ 的) *黑塞 d^2E 的退化度*.

定理 4 设 γ_0 为 M 上从点 p 到点 q 的测地线; 于是 $v \in W_{\gamma_0}$ (即属于黑塞 d^2E 的核) 当且仅当 v 是沿 γ_0 的雅可比场 (特别有 $v|_p = v|_q = 0$).

因此, 黑塞 d^2E 的核不为零当且仅当测地线 γ_0 的端点 p 和 q 沿 γ_0 共轭. 核 W_{γ_0} 的维数 (即黑塞的退化阶) 等于沿 γ_0 的共轭点 p 和 q 的重数.

证明 设 v 为沿 γ_0 的雅可比场, 使 $v|_p = v|_q = 0$. 于是 $v \in T_{\gamma_0}\Omega$. 因为 γ_0 为光滑轨线, 于是 $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v(t)) = 0$ (非间断). 因 $v(t)$ 为雅可比场, 故 $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v(t) + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 \equiv 0$ 从而由泛函 E 的第二变分公式得到

$$d^2E(v, \tilde{v}) = \sum_{(i)} \langle \tilde{v}(t), 0 \rangle + \int_0^1 \langle \tilde{v}(t), 0 \rangle dt \equiv 0.$$

因此 $v \in W_{\gamma_0}$ (即 d^2E 的核). 反之, 设 $v \in W_{\gamma_0}$. 需要证明 $v(t)$ 为沿 $\gamma_0(t)$ 的雅可比场. 由于场 $v(t)$ 为分段光滑, 故线段 $[0,1]$ 可用有限个点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ 分割成区间 (t_{i-1}, t_i), 使场 $v(t)$ 在其上光滑. 像以前那样, 构造 [0,1] 上的光滑函数 $f(t)$, 使它在点 $\{t_i, 0 \leqslant i \leqslant k\}$ 上为零, 并在其余所有点上为正. 考虑场 $q = f(t)((\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0)$. 将其代入 d^2E, 我们得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}\bigg|_{u_1 = u_2 = 0} = d^2E(v, q) = -\sum_{(i)} \langle q, \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v) \rangle$$
$$- \int_0^1 |(f\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0|^2 dt = 0.$$

因为 $q(t_i) = 0, 0 \leqslant i \leqslant k$, 故上式的第一项为零, 并因 $f(t)$ 在 $t \neq t_i, 0 \leqslant i \leqslant k$ 大于零, 故 $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 \equiv 0$ 在每个区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上成立. 于是 v 为沿每个区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 的雅可比场. 我们来证明 v 为沿整条轨线 γ_0 的雅可比场. 为此只须证明 $\nabla_{\dot{\gamma}_0}(v)$ 在区间 $[0,1]$ 上没有间断点. 事实上, 设若相反: 假定 $\Delta(\nabla_{j_0} v)_{t_i} = \nabla_{\dot{\gamma}_0} v(t_i^+) - \nabla_{\dot{\gamma}_0} v(t_i^-)$ 为在 t_i 的跳跃; 于是可以考虑沿 $\gamma_0(t)$ 的向

量场 $g(t)$, 使得 $g(t_i)=\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0}v)_{t_i}$. 我们因而得到了

$$\frac{1}{2}d^2E(v,g)=\sum_{i=1}^{k-1}|\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0}v)_{t_i}|^2$$
$$+\int_0^1\langle g,(\nabla_{\dot\gamma_0})^2v+R(\dot\gamma_0,v)\dot\gamma_0\rangle dt=0,$$

因此知 $v\in\operatorname{Ker}(d^2v)$. 在此和式中的第二项等于零 (见前面), 故而

$$\sum|\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0}v)_{t_i}|^2=0,$$

即对所有 i; $\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0}v)_{t_i}=0$. 因此, $\nabla_{\dot\gamma_0}v$ 没有间断点, 从而 v 为沿整条轨线 γ_0 的雅可比场. □

注 黑塞形式 d^2E 的核的维数总是有限的, 这是因为它等于沿 γ_0 的线性无关的雅可比场 (在点 p 和 q 为 0) 的个数.

在轨线 γ_0 的各种不同的变差中有一类称做*测地变差*的, 即这样的光滑映射 $\alpha:(-\varepsilon,+\varepsilon)\times[0,1]\to M^n$, 满足 $\alpha(0,t)=\gamma_0(t)$, 且每条轨线 $\widetilde{\alpha}(u)$ (记住, $\widetilde{\alpha}(u)(t)=\alpha(u,t)$) 为测地线 (即在测地线 γ_0 的扰动过程中所得到的扰动轨线仍然是测地线). 我们考虑这种轨线 $\widetilde{\alpha}$ 在空间 Ω 中的 "速度向量", 即沿 γ_0 的向量场 $\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}$. 我们断言, 这是个沿 γ_0 的雅可比场.

事实上, 因为所有的轨线 $\widetilde{\alpha}(u)$ 都是测地线, 故 $\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\right)=0$; 于是下面的表达式为零:

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}\left(\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\right)=\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\left(\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\right)+R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

由于 $\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\right)=\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)$, 故

$$\left(\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\right)^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)+R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}=0,$$

即场 $\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}$ 为雅可比场.

逆命题也对: 沿测地线 γ_0 的任意一个雅可比场可以用某个测地变差得到. 事实上, 我们首先假设测地线 γ_0 连接了两个充分靠近的点 p' 和 q', 它们在某个半径 $\varepsilon>0$ 充分小的圆盘 $D^n\subset M^n$ 中. 那么不妨设在 D^n 中任何一对点 α,β 由包含在 D^n 中唯一的一条测地线相连接. 我们先证明存在沿 γ_0 (从 p' 到 q') 的雅可比场的存在性, 这个场在点 p' 和 q' 具有任意给出的值 (见图 99). 考虑在点 p' 和 q' 的 M 的切向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 并构造沿 γ_0 的具给定初值: 在点 p' 为 $\boldsymbol{a}$,

在点 q' 为 $\boldsymbol{b}$ 的雅可比场. 通过点 p' 作光滑曲线 $a(u)$ 使 $\dfrac{da(0)}{du} = \boldsymbol{a}$; 类似地, 通过点 q' 作轨线 $b(u)$ 使 $\dfrac{db(0)}{du} = \boldsymbol{b}$. 以测地线连接点 $a(u)$ 和 $b(u)$ (这样的测地线是唯一的) 得到测地线族. 改变 u 便得到了从点 p' 到点 q' 的测地线 γ_0 的扰动, 其初值为所给出的 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ (见图 100). 对这个所构造的测地扰动取对参数 u 的微分便得到 γ_0 的从 p' 到 q' 的所想要的雅可比场. 因为雅可比场由其在点 p' 和 q' 的值唯一决定, 故沿 γ_0 从 p' 到 q' 的任意雅可比场可以由上面所指出的方式得到. 我们注意到, 所有沿 γ_0 从 p' 到 q' 的雅可比场的线性空间同构于 $2n$ 维的线性空间: $T_{p'}(M^n) \times T_{q'}(M^n)$. 有更一般的论断: 沿从点 p 到点 q (其中的 p 和 q 不必要相近) 的测地线 γ_0 由在 γ_0 上的非共轭点的它的两个值所唯一决定.

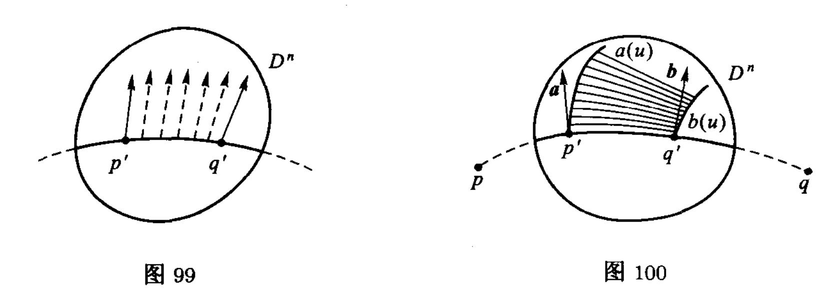


图 99 图 100

我们现在来证明测地变差的存在性, 这个变差由从 p 到 q 的整条测地线 γ_0 已经给出的雅可比场 v 产生. 为此, 考察位于足够小的球 D^n 内部的点对 $p', q' \in \gamma_0$, 并在点 p' 和 q' 给出下面向量: $\boldsymbol{a} = v|_{p'}, \boldsymbol{b} = v|_{q'}$. 进一步, 我们来构造由从点 p' 到 q' 的沿 γ_0 的雅可比场 v 所生成的测地变差 (见上面的构造), 并且延拓所得到的测地线族到圆盘 D^n 之外, 从而给出所要的沿整条测地线 γ_0 的测地变差.

我们来研究沿 γ_0 的共轭点与黑塞 d^2E 的性质之间的关系. 我们记得, 黑塞 d^2E 的指数 λ 是指在 $T_{\gamma_0}\Omega$ 中使形式 d^2E 负定的子空间的最大维数. 成立下面的重要命题.

定理 5 二次型 d^2E 在临界点 $\gamma_0 \in \Omega$ 的指数等于在测地线 $\gamma_0(t), 0 < t < 1$ 上与点 $p = \gamma_0(0)$ 共轭的点的个数 (每个共轭于 $\gamma_0(0) = p$ 的点 $\gamma_0(t)$ 应以这对共轭点的重数来计算个数). 指数 $\lambda = \lambda(\gamma_0)$ 总是有限的.

注 如果点 p 和 q 沿 γ_0 不共轭, 则可以考虑整条轨线 $\gamma_0(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$. 这时 $\operatorname{Ker}(d^2E) = 0$, 且 $\gamma_0 \in \Omega$ 是非退化的指数为 λ 的临界点.

由这个定理可特别地推出这样的结论, 即每个测地线段 γ_0 只包含有限个与点 $p = \gamma_0(0)$ 共轭的点.

在进行定理的正式证明之前, 我们将给出一个直观的解释, 它指出共轭点决

定了空间 Ω 中的那样的变差 $\widetilde{\alpha}(u)$, 沿着它, 泛函 E 的二次部分在减少. 我们假定已在流形 M 上给出了正定的黎曼度量, ∇ 为黎曼联络, 它与这个黎曼度量相容.

设 $x_0 \in \gamma_0$ 为与 $p=\gamma_0(0)$ 沿 $\gamma_0(t)$ 的共轭点. 于是沿线段 $[p,x_0]$ 测地线 γ_0 存在指数为 $\lambda(x_0)$ 的雅可比场 ($\lambda(x_0)\geqslant 1$), 它在点 p 和 x_0 为零.(当然, 这个场也可以在 $[p,x_0]$ 中某些内点化为零). 我们考虑线段 $[p,x_0]$ 上的测地变差 $\widetilde{\alpha}(u)$, 其方向为某个沿 $[p,x_0]$ 且在 p,x_0 为零的雅可比场. 这表明存在 $[p,x_0]$ 上测地线的无限小 "旋转", 它保持点 p 和 x_0 不动 (见图 101)

考虑由这个测地变分 $\widetilde{\alpha}$ 定义的测地线 $\widetilde{\alpha}(u)t, 0\leqslant t\leqslant t_0$, 其中 t_0 对应于点 $x_0\in\gamma_0$. 于是可以考察在空间 Ω 中的光滑函数 $\widetilde{\varphi}:\widetilde{\varphi}(u)(t)=\widetilde{\alpha}(u)(t)$, 当 $0\leqslant t\leqslant t_0; \widetilde{\varphi}(u)(t)=\gamma_0(t)$ 其中 $t_0\leqslant t\leqslant 1$ (见图 102).

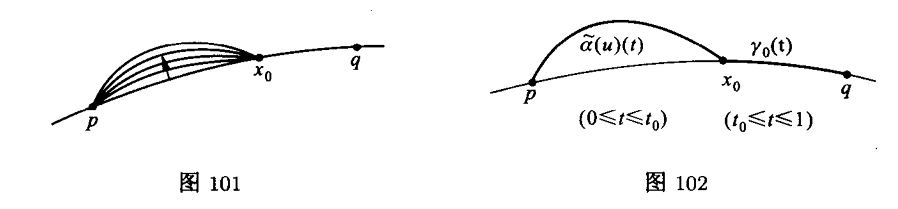


图 101　　　　图 102

由于 $\widetilde{\varphi}(u)$ 的选取, 可以假定在第一级逼近下, γ_0 从 p 到 q 的长度等于 $\widetilde{\alpha}(u)(t)$ 从 p 到 x_0 的长度加上 γ_0 从 x_0 到 q 的长度, 就是说可以假定泛函 E 在沿轨线 $\widetilde{\varphi}(u)$ 的充分小挠动 $0\leqslant u\leqslant\varepsilon$ 下不变.

因为雅可比场完全被其自身所给出的初值决定, 故在点 x_0 处轨线 γ_0 的速度向量和轨线 $\widetilde{\alpha}(u)(t)$ 之间的夹角不为零 (见图 103).

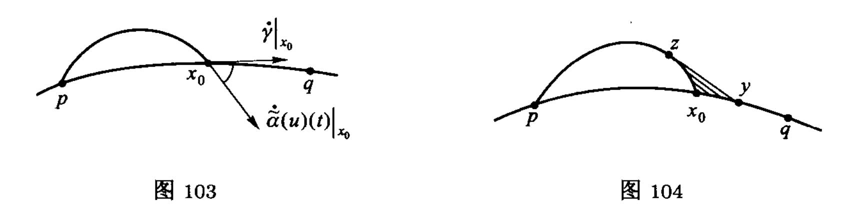


图 103　　　　图 104

现在我们将在空间 Ω 中构造一条新的轨线 $\widetilde{\psi}(u)$, 它由点 γ_0 出发, 沿着它泛函 E 的二次部分严格减少, 即速度向量 $\dot{\widetilde{\psi}}(u)|_{u=0}$ 属于 $T_{\gamma_0}\Omega$ 的一个子空间, 在其上黑塞 d^2E 为负定. 变差 $\widetilde{\psi}(u)$ 的构造显示在图 104 上.

因为在充分小的三角形 x_0yz 中有严格的不等式: (x_0,y) 的长 $+(x_0,z)$ 的长 $>(z,y)$ 的长, 于是轨线 $\widetilde{\psi}(u)(t)$ (其中 $\widetilde{\psi}=(pz)+(zy)+(yq)$) 的长严格地小于 $\widetilde{\varphi}(u)(t)$ 的长, 即 γ_0 从 p 到 q 的长度. 自然, 我们在这里用到了黎曼度量的正定性. 因此, 在线段 $[p,x_0]$ 上的每个在点 p 和 x_0 为 0 的雅可比场对于黑塞 d^2E 在点 γ_0 的指数贡献了 1.

定理的证明 考虑线段 $[0,1]$ 的足够细的剖分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$，使得测地线 γ_0 的每段弧 $[\gamma_0(t_{i-1}),\gamma_0(t_i)]$ 为连接 $\gamma_0(t_{i-1})$ 和 $\gamma_0(t_i)$ 在包含这两个点的充分小的球中的极小测地弧.

设 $T_{\gamma_0}\{t_i\}\subset T_{\gamma_0}$ 为 T_{γ_0} 中的向量子空间，它由所有那些沿 $\gamma_0(t)$ 的向量场构成，这些向量场具有下面的性质: a) 场 $v(t)$ 沿 γ_0 在线段 $[t_{i-1},t_i]$ 上为雅可比场，$1\leqslant i\leqslant k$; b) $v(0)=0, v(1)=0$ (见图 105).

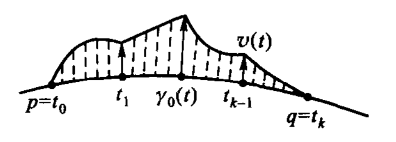


图 105

换句话说，$T_{\gamma_0}\{t_i\}$ 为沿轨线 $\gamma_0(t)$ 的所有有折断的雅可比场 ($\{t_i\}$ 为跳跃点). 连同子空间 $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ 一起，我们考虑在 $T_{\gamma_0}\Omega$ 中另一个子空间 Q_{γ_0}，它由所有满足 $v(t_i)=0, 0\leqslant i\leqslant k$ 的向量场 $v(t)$ 构成.

引理 切空间 $T_{\gamma_0}\Omega$ 分解为两个子空间的直和:

$$T_{\gamma_0}\Omega=T_{\gamma_0}\{t_i\}\oplus Q_{\gamma_0},$$

其中的子空间 $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ 和 Q_{γ_0} 对于在 $T_{\gamma_0}\Omega$ 中由黑塞 d^2E 给出的内积下正交 (即，如 $v_1\in T_{\gamma_0}\{t_i\}, v_2\in Q_{\gamma_0}$，有 $d^2E(v_1,v_2)=0$). 黑塞 d^2E 在子空间 Q_{γ_0} 为正定，即 d^2E 在 $T_{\gamma_0}\Omega$ 的指数等于 d^2E 在 $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ 上的指数. 因为 $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ 为有限维线性空间，故黑塞 d^2E 的指数总为有限.

证明 设 $v\in T_{\gamma_0}$; 考虑向量 $v(t_i), 1\leqslant i\leqslant k$; 于是存在唯一的有折断的雅可比场 v'，满足 $v(t_i)=v'(t_i), 1\leqslant i\leqslant k$; 因而 $(v-v')(t_i)=0$，故 $v''=v-v'\in Q_{\gamma_0}$. 因此，对任意的 $v\in T_{\gamma_0}$ 存在唯一的形如 $v=v'+v''$ 的分解，其中 $v'\in T_{\gamma_0}\{t_i\}, v''\in Q_{\gamma_0}$. 故而 T_{γ_0} 分解为子空间 $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ 和 Q_{γ_0} 的直和. 证明它们正交. 由第二变分公式有:

$$\frac{1}{2}d^2E(v',v'')=-\sum_{(i)}\langle v'',\Delta(\nabla_{\dot\gamma_0}v')\rangle-\int_0^1\langle v'',0\rangle dt\equiv 0,$$

这就是所要证明的.

现在来证明 d^2E 在 Q_{γ_0} 上的限制是个正定形式，即如果 $v\in Q_{\gamma_0}$，则 $d^2E(v,v)\geqslant 0$，同时其等于零当且仅当 $v=0$. 考虑道路 γ_0 的变差 $\widetilde{\alpha}(u)$，它生成了场 $v\in Q_{\gamma_0}$. 因为场 $v(t)$ 在点 $t_i, 1\leqslant i\leqslant k$ 为零，故显然可假设 $\widetilde{\alpha}(u)(t_i)\equiv 0$ 对任意 $u, 1\leqslant i\leqslant k$ 成立 (见图 106).

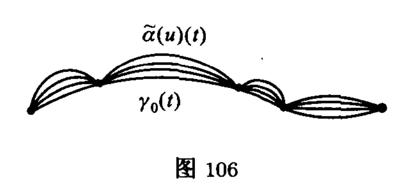


图 106

因为测地线 γ_0 从点 $\gamma_0(t_{i-1})$ 到点 $\gamma_0(t_i)$ 的弧 $(1\leqslant i\leqslant k)$ 极小，则对道路 $\widetilde{\alpha}(u)(t)$ 从值 t_{i-1} 到值 t_i 的相应弧段有不等式 $E_{t_{i-i}}^{t_i}(\widetilde{\alpha}(u)(t))\geqslant E_{t_{i-1}}^{t_i}(\gamma_0(t))$; 从

而 $E(\widetilde{\alpha}(u)(t)) \leqslant E(\gamma_0(t)) = E(\widetilde{\alpha}(0)(t))$. 由于 $d^2E(u,v)$ 可以理解为 $E(\widetilde{\alpha}(u)(t))$ 在点 $u=0$ 的二阶导数, 故按同样理由, 对 $E(\widetilde{\alpha}(u)(t))$ 局部极小的存在表明 $d^2E(v,v) \geqslant 0$.

还需要证明当 $v \neq 0, v \in Q_{\gamma_0}$ 有 $d^2E(v,v) > 0$. 假若 $d^2E(v,v) = 0$. 我们来证明由此将得出对任意 $\varphi \in T_{\gamma_0}$ 有 $d^2E(\varphi, v) = 0$. 因为 $\varphi = \varphi' + \varphi''$, 其中 $\varphi' \in T_{\gamma_0}\{t_i\}$, 而 $\varphi'' \in Q_{\gamma_0}$, 则

$$d^2E(\varphi' + \varphi'', v) = d^2E(\varphi', v) + d^2E(\varphi'', v) = d^2E(\varphi'', v),$$

这是因为 $d^2E(\varphi', v) = 0$ (我们回忆一下: 子空间 $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ 和 Q_{γ_0} 对于形式 d^2E 是正交的). 因为对任意实的 $\alpha, (\alpha\varphi''+v) \in Q_{\gamma_0}$, 故而有 $d^2E(\alpha\varphi''+v, \alpha\varphi''+v) \geqslant 0$, 即 $\alpha^2 d^2E(\varphi'', \varphi'') + d^2E(v,v) + 2\alpha d^2E(\varphi'', v) = \alpha^2 d^2E(\varphi'', \varphi'') + 2\alpha d^2E(\varphi', v) \geqslant 0$, 就是说, 由于 α 的任意性, 我们得到了 $d^2E(\varphi'', v) = 0$. 因而对任意 $\varphi \in T_{\gamma_0}$ 有 $d^2E(\varphi, v) \equiv 0$, 故 $v \in \mathrm{Ker}(d^2E)$. 同时 $\mathrm{Ker}(d^2E)$ 只由雅可比场构成, 而由于子空间 Q_{γ_0} 只包含了零雅可比场, 故最后我们得到在 Q_{γ_0} 上 $d^2E(v,v) > 0$. 引理得证. □

所证明的这个引理让我们在计算 d^2E 沿 γ_0 的指数时只能局限于对应于线段 $[0,1]$ 的充分细的分割 $\{t_i\}$ 的那种折断雅可比场. 考虑在从 0 到 t_0 的区间上的测地线 $\gamma_0(t)$, 其中 $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$. 以 $\lambda(t_0)$ 记 d^2E 沿线段 $[0, t_0]$ 上测地线的指数. 显然, $\lambda(t_0)$ 是个单调函数: 如果 $t_0 < t_0'$ 则 $\lambda(t_0) \leqslant \lambda(t_0')$. 由此得到, 在 $[0, t_0]$ 上的任意雅可比场在点 $t=0$ 及某个点 $t=\alpha, \alpha \leqslant t_0$ 上为零, 从而每个这样的场, 当令在 $[\alpha, t_0']$ 上为零时便可延拓到线段 $[0, t_0']$ 上的雅可比场 (见图 107). 又, 从测地线 $\gamma_0(t)$ 的局部极小性知, 对充分小的 t_0 有 $\lambda(t_0) = 0$. 如果在 t_0 的点不共轭于在 $\gamma_0(t)$ 上的点, 则函数 $\lambda(t)$ 在 t_0 的充分小的邻域内将为局部常数, 这是因为沿 $\gamma_0(t)$ 与 $\gamma_0(t_0)$ 不共轭的点是个开集. 于是, $\lambda(t)$ 的跳跃只可能出现在与点 $\gamma_0(0) = p$ 共轭的 t_0 处的点. 这个跳跃的特性我们实际上已在前面研究过了. 这个跳跃等于在点 $\gamma_0(0)$ 和 $\gamma_0(t_0)$ 为零的线性无关雅可比场的个数 (即共轭点 $\gamma_0(t_0)$ 的指数). 事实上, 每个这样的雅可比场定义了轨线 $\gamma_0(t)$ 在空间 Ω 中的变差 $\widetilde{\alpha}(u)$, 沿着它黑塞为负定. 我们已在前面证明过了这个结果; 在这里我们只是回忆一下 (见图 108). 因此, 通过每一个共轭点 t_0 时, 函数 $\lambda(t)$ 增加了这对

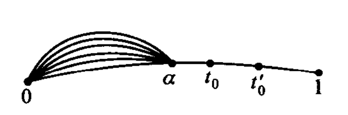


图 107

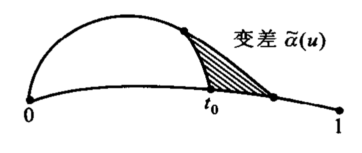


图 108

共轭点的指数, 从而到达了点 $q=\gamma_0(1)$ (按假定它与点 $p=\gamma_0(0)$ 不共轭), 最终我们得到, 值 $\lambda(1)$ 等于与点 $p=\gamma_0(0)$ 沿测地线 $\gamma_0(t)$ 共轭的所有点 (带重数) 的指数和.

关于泛函 E 的指数定理证完. □

§22. 指数定理的应用

现在利用在 §21 中所证明的关于指数和定理来研究道路空间 $\Omega(M)$ 的拓扑结构, 其中的 M 为光滑紧流形. 我们将进行类似于有限维定理那样的工作, 在那里我们曾用有限维流形上所给出的莫尔斯函数构造了这个流形的胞腔剖分. 代替有限维流形, 我们所取的是 "无限维流形" $\Omega(M)=\Omega(M,p,q)$, 即从点 p 到点 q 的分段光滑道路的空间.

我们考虑作用泛函 $E(\gamma),\gamma\in\Omega M$; 如果 E 的所有临界点 (即从 p 到 q 的测地线) 为非退化的, 则说这个泛函为 "莫尔斯函数". 像我们已经解释过的那样, 出现这种情况当且仅当沿任意两点 p 和 q 的连接的测地线, 点 p 和点 q 不相互共轭. 另外, 在每个临界点 $\gamma_0\in\Omega M$, 泛函 E 给出了一个整数: 这个临界点的指数, 即从点 p 到点 q 的测地线的指数. 因此, 按对有限维情形的类比, 可以期待在每个临界点 (即测地线)"挂着" 一个维数等于这个临界点指数 (即测地线的指数) 的胞腔. 于是出现了空间 ΩM 的胞腔剖分, 其个数和维数由连接 p 和 q (p 和 q 非共轭) 的测地线的个数和指数确定.

因为我们所考虑的是黎曼流形 M^n, 故在任意两条道路 $\gamma_1,\gamma_2\in\Omega M^n$ 之间可以定义其距离

$$d(\gamma_1,\gamma_2)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\rho(\gamma_1(t),\gamma_2(t))+\sqrt{\int_0^1\left(\frac{ds_1(t)}{dt}-\frac{ds_2(t)}{dt}\right)^2dt},$$

其中 $s_1(t),s_2(t)$ 为沿 $\gamma_1(t),\gamma_2(t)$ 的弧长; $\rho(x,y)$ 为 x 和 y 之间在 M 上的距离 (在所给的黎曼度量中). 对于每个 $a>0$, 我们考虑区域 $\Omega^a\subset\Omega M$, 即所有满足 $E(\gamma)\leqslant a$ 点 $\gamma\in\Omega M$. 这表明 Ω^a 可以 (在某个准确的意义下) 由光滑的有限流形逼近.

固定一个以点 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ 分割的线段 $[0,1]$, 并以 $\Omega(t_0,\cdots,t_k)$ 表示 ΩM 的一个子空间, 它由所有分段光滑的测地线组成, 这些测地线只在等于 $t_0,t_1,\cdots,t_k$ 的 t 值有间断点. 以 $\Omega^a(t_0,\cdots,t_k)$ 代表交空间 $\Omega^a\cap\Omega(t_0,\cdots,t_k)$; 即 $\Omega^a(t_0,\cdots,t_k)$ 为所有沿其 $E\leqslant a$ 的所有分段光滑测地线构成.

引理 1 设 M^n 为紧流形, 且 $\Omega^a\neq\varnothing$. 于是线段 $[0,1]$ 的对所有充分细的分割 $(t_0,\cdots,t_k)$, 集合 $\Omega(t_0,\cdots,t_k)\cap(E<a)$ 可以赋予光滑的有限维流形的结构.

证明 设 $\varepsilon > 0$ 为充分小的数, 使得对任意一对相距不大于 ε 点, 存在在半径 ε 的球内连接它们的唯一的测地线. 选取分割 $(t_0, \cdots, t_k)$ 使得对所有的 i 有 $t_i - t_{i-1} < \varepsilon^2/a$. 于是每条测地线 $\gamma \in \Omega^a(t_0, \cdots, t_k)$ 一一地由 $k-1$ 个点组决定: $\gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_{k-1})$. 映射 $\gamma \to (\gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_{k-1}))$ 建立了在 $\Omega(t_0, \cdots, t_k) \cap (E < a)$ 和直积 $M \times \cdots \times M((k-1)$ 个) 的开子集之间的同胚. 引理得证. □

考虑泛函 E 由 Ω^a 到光滑有限维子流形 $\Omega(t_0, \cdots, t_k) \cap (E < a)$ 上的限制. 记此函数为 E'.

引理 2 函数 E' 为在有限维流形 $\Omega(t_0, \cdots, t_k) \cap (E < a)$ 上的光滑莫尔斯函数. 这个函数的临界点恰好是泛函 E 在 $\Omega(t_0, \cdots, t_k) \cap (E < a)$ 上的临界点, 即从 p 到 q 的 (没有间断的) 测地线, 其长度小于 $\sqrt{a}$. 这个函数的临界点的指数恰好等于相应的测地线的指数. 对任意的 $b < a$, 流形 $\Omega(t_0, \cdots, t_k) \cap (E \leqslant b)$ 是集合 $\Omega^b = (E \leqslant b)$ 的形变收缩.

证明 我们将表出形变 $\gamma : (E \leqslant b) \to \Omega(t_0, \cdots, t_k) \cap (E \leqslant b)$. 设 $\gamma \in (E \leqslant b)$, 以及 $(t_0, \cdots, t_k)$ 为在上面已被固定的充分小的 $[0,1]$ 的分割; 考虑点 $\gamma(t_0), \cdots, \gamma(t_k)$, 并让道路 $r(\gamma)$ 为一条属于 $\Omega(t_0, \cdots, t_k) \cap (E \leqslant b)$, 由点 $\gamma(t_0), \cdots, \gamma(t_k)$ 唯一决定的分段光滑测地线. 所要的形变收缩的构造显示在图 109 中. 另外, 关于 E' 在 $\Omega(t_0, \cdots, t_k) \cap (E \leqslant b)$ 上的临界点恰好是从 p 到 q 的无间断的测地线的论断由第一变分公式得到. E' 和 E 的指数相等的断言由沿测地线的雅可比场的局部性质得出: 函数 E' 的雅可比场的空间等同于由泛函 E 决定的雅可比场的空间. 引理得证. □

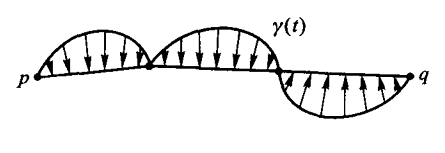


图 109

因此, 我们得到下面的命题.

推论 设 M^n 为紧流形 (但是, 也可把紧性换为只具有完备性的流形 M^n); 设 $p, q \in M^n$ 为一对沿长度不超过 $\sqrt{a}$ 的测地线不共轭的点. 于是集合 $\Omega^a = (E \leqslant a)$ 同伦等价于一个有限胞腔复形, 这个复形的每个 λ 维胞腔一一对应于指数为 λ 的测地线 (其长度不大于 $\sqrt{a}$).

令 $a \to \infty$ (趋向无穷大), 我们得到了结论说, 整个空间 Ω 同伦等价于胞腔复形, 其中的每个胞腔相互一一对应于从 p 到 q 的测地线, 而胞腔的维数等于对应测地线的指数.

注 我们将不在这里讨论更加形式的极限过程 $a \to \infty$, 因为这个讨论需要引进一种拓扑概念, 即空间扩张的直接极限.

现在我们考虑流形 M^n 上所有从点 p 到点 q 的连续道路的空间 $\Omega^*(M,p,q)$. 我们发现, 空间 $\Omega^* M$ 与 ΩM 同伦等价, 故而 ΩM 的胞腔剖分也产生了 $\Omega^* M$ 的胞腔剖分. 考虑自然的嵌入 $i: \Omega \to \Omega^*$. 不妨设空间 Ω^* 的拓扑由度量 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ 给出, 其中 $\gamma_1,\gamma_2 \in \Omega^*$, 而 ρ 为黎曼流形 M^n 上的距离. (通常称这个拓扑为紧 – 开拓扑.) 比较 Ω 和 Ω^* 的拓扑 (见前面) 容易得出这个嵌入映射 i 连续的结论.

引理 3 空间 Ω 和 Ω^* 同伦等价.

证明 我们来构造 Ω^* 上的连续函数 $g, 0 \leqslant g(\gamma) \leqslant 1$, 使得由不等式 $|t-t'| < 2g(\gamma)$ 推出: 点 $\gamma(t)$ 和 $\gamma(t')$ 被唯一的极小测地线连接. 设 $f: M^n \to [0,1]$ 在紧流形 M^n 上的一个任意的连续函数, 其值在 0 和 1 之间. 以 $\varepsilon_1(\gamma)$ (其中 $\gamma \in [0,1]$) 表示那样的最大实数, 使得对 $f^{-1}[0,\gamma]$ 中任意一对相互距离不大于 $\varepsilon(\gamma)$ 的点有连接它们的唯一的测地线. 显然, 随着 γ 的增大, 函数 $\varepsilon_1(\gamma)$ 单调地不增. 考虑函数 $\varepsilon_2(\gamma)$, 满足 $0 < \varepsilon_2(\gamma) < \varepsilon_1(\gamma)$. 令 $\varepsilon(\gamma) = \varepsilon_2(\max\limits_{(t)} f(\gamma(t)))$; 我们得到了连续映射 $\varepsilon: \Omega^* \to \mathbb{R}$. 由函数 ε_2 的构造, 有任意一对在曲线 $\gamma \in M^n$ 上, 相互距离不超过 $\varepsilon(\gamma)$ 的点, 可以由一条唯一的极小测地线连接. 考虑一个新函数:

$$\tau(\gamma,\alpha) = (\alpha-1)\varepsilon(\gamma) + \max_{|t-t'|\leqslant\alpha} \rho(\gamma(t),\gamma(t')),$$

这里 $\tau: \Omega^* \times [0,1] \to \mathbb{R}$. 当变量 α 从 0 变到 1 时, 函数 τ 严格地单调增加, 并且 $\tau(\gamma,0) < 0 \leqslant \tau(\gamma,1)$. 因而对任意 $\gamma \in \Omega^*$, 存在唯一的 $\alpha_0 \in (0,1]$, 使得 $\tau(\gamma,\alpha_0) = 0$. 最后, 令 $\alpha_0 = 2g(\gamma)$. 如果 $\alpha = |t-t'| \leqslant \alpha_0 = 2g(\gamma)$, 则 $\tau(\gamma,\alpha) \leqslant \tau(\gamma,\alpha_0) = 0$, 即

$$\tau(\gamma,\alpha) = (\alpha-1)\varepsilon(\gamma) + \max_{|t-t'|\leqslant\alpha} \rho(\gamma(t),\gamma(t')) \leqslant 0, \text{即}$$
$$\rho(\gamma(t),\gamma(t')) \leqslant (1-\alpha)\varepsilon(\gamma) \leqslant \varepsilon(\gamma).$$

故而, $\gamma(t)$ 和 $\gamma(t')$ 被唯一的一条测地线连接 (参看上面对 $\varepsilon(\gamma)$ 的定义). 完成了函数 $g(\gamma)$ 的构造, 我们来定义连续映射 $\gamma: \Omega^* \to \Omega$: 令 $r(\gamma)$ 为唯一确定的道路, 使得 $r(\gamma)$ 在参数 $t = 0, g(\gamma), 2g(\gamma), \cdots, kg(\gamma)$ 和 $t = 1$ 的值上等于 γ 的相应点; 其中 $k = \left[\dfrac{1}{g(\gamma)}\right]$ (整数部分); 轨线 $r(\gamma)$ 在每个区间 $[pg(\gamma),(p+1)g(\gamma)], 0 \leqslant$

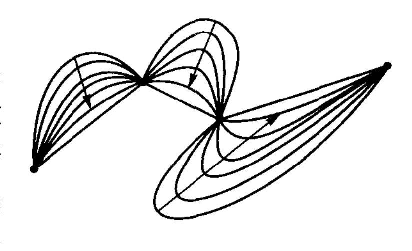


图 110

$p \leqslant k-1$ 上为测地线. 同上面那样, 直接验证映射 ir 和 ri 同伦于恒同映射 (见图 110). 引理得证. □

因此我们已证明了下面的定理.

定理 1 设 M^n 为紧 (或完备) 黎曼流形. p 和 q 为 M^n 上的一对点, 它们沿任何一条连接它们的测地线都不共轭. 于是连续道路的空间 $\Omega^*(M^n,p,q)$ (它同伦等价于空间 $\Omega(M^n,p,q)$) 具有可数胞腔复形的同伦型, 其中的每个从点 p 到 q 并且有指数 λ 的测地线恰好对应于维数为 λ 的胞腔.

注 如果固定测地线 γ_0, 则对应的胞腔 σ^λ (λ 为 γ_0 的指数) 是作为由 γ_0 用 γ_0 的所有雅可比场的方向的扰动, 沿 γ_0 得到的轨线的集合 (见图 111).

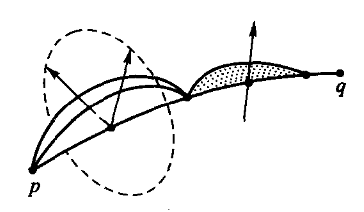


图 111 指数 $\lambda=3$. 这个测地线 γ_0 对应于三维胞腔 σ^3

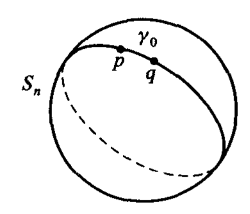


图 112

我们将给出这个所证定理的应用. 运用这个定理来计算闭路空间 ΩS^n (同伦于道路空间) 的整系数同调和上同调群, 其中 S^n 为 n 维球面. 在球面 S^n 上引进标准的黎曼度量, 并设 p 和 q 为 S^n 上两个充分靠近的点. 于是可以假定 p 和 q 沿 S^n 上连接它们的任一条测地线不共轭 (例如, 与点 p 共轭的在球面上只有一个点, 这就是它的对径点 $-p$). 因而 p 和 q 由可数条测地线 $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\cdots$ 相连接, 其中 γ_0 为大圆中较短的那条弧, 而 p 和 q 在其上 (见图 112). 以 d 表示大的圆弧; 于是 $\gamma_1=d+\gamma_0, \gamma_2=d+d+\gamma_0; \gamma_3=d+d+d+\gamma_0$ 等等. 显然, 测地线 γ_k 的指数 $\lambda(\gamma_k)$ 等于 $k(n-1)$. 这时, 我们利用点 p 和 $-p$ 共轭且重数为 $n-1$ 这个事实: 于是存在 $n-1$ 个大圆弧的测地变分 (旋转), 这些圆弧连接了点 p 与 $-p$. 由以前证明的定理得出, 闭道空间 ΩS^n 有胞腔复形的同伦型, 其中对每个维数 $0, n-1, 2(n-1), 3(n-1), \cdots$ 正好有一个胞腔 (没有其他维数的胞腔). 由此, 我们可以得到关于同调群 $H_*(\Omega S^n;\mathbb{Z})$ 的信息. 首先假设 $n>2$; 于是上面提到的胞腔 $\{\sigma^{k(n-1)}\}, k=0,1,2,\cdots$ 中的每一个是 (上) 闭链 (这是因为一般并不含有两个相邻的维数的胞腔), 即

$$H_p(\Omega S^n;\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z}, \text{如果 } p=k(n-1), k=0,1,2,\cdots\\ 0, \text{对所有其他的 } p.\end{cases}$$

特别, $H_p(\Omega S^n;\mathbb{Z}) \simeq H^p(\Omega S^n;\mathbb{Z})$. 在 $n=2$ 时, 讨论有些复杂. 这时在每个维数 $0,1,2,3,4,\cdots$ 正好有一个胞腔, 故边缘算子 $\partial: C_p \to C_{p-1}$ 的平凡性已不能从前面所提及的想法中得到. 我们更仔细地研究一下闭道空间 ΩS^2 的三维骨架 $(\Omega)^{(3)}$. 由前面的证明中知道, $(\Omega S^2)^{(3)} = \sigma^0 \cup \sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3$. 我们记得, 从标准的纤维丛 $E \xrightarrow{\Omega} S^2$ (其中 E 为 S^2 上的道路空间, 这些道路从 S^2 上的一个固定点出发) 得到了关系: $\pi_i(S^2) = \pi_{i-1}(\Omega), i \geqslant 1$. 像在 [1], 卷 Ⅱ, §21 中所证明的, $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, 即 $\pi_1(\Omega) = \mathbb{Z}$. 另外 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §22), $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (即 $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$). 因为 $H_1(\Omega;\mathbb{Z}) = \{$ 群 $\pi_1(\Omega)$ 的阿贝尔化 $\}$, 故 $H_1(\Omega;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. 因而, 胞腔 σ^2 的边缘在 $S^1 = \sigma^0 \cup \sigma^1$ 中收缩为一点, 即二维骨架 $(\Omega)^{(2)}$ 同伦等价于束 $S^1 \vee S^2$ (参看 §4). 又因为 $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$, 故当附加到 $S^1 \vee S^2$ 上时, 三维胞腔 σ^3 应使基本群 $\pi_1(S^1)$ 在 $\pi_2(S^2 \vee S^1)$ 上的作用化零, 从而 $(\Omega)^{(3)}$ 同伦等价于乘积 $S^1 \times S^2$. 由于 ΩS^2 的二维 (上) 同调完全由三维骨架 $(\Omega S^2)^{(3)}$ 决定, 故得到 $H_2(\Omega S^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H^2(\Omega;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. 以 a 和 b 分别表示上同调群 $H^1(\Omega;\mathbb{Z})$ 和 $H^2(\Omega;\mathbb{Z})$ 的生成元 ($\deg a = 1, \deg b = 2$). 显然在环 $H^*(\Omega;\mathbb{Z})$ 中有 $a^2 = 0$.

回忆 $H-$ 空间的定义. 称拓扑空间 Y 为 $H-$ 空间是说在其上定义了乘积运算 $\mu: Y \times Y \to Y$, 其具有 "同伦单位元" (参看 §7). 考虑映射

$$Y \xrightarrow{j_1} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y,$$
$$Y \xrightarrow{j_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y,$$

这里 $j_1(y) = (y, y_0), j_2(y) = (y_0, y), y_0 \in Y$ 是 "同伦单位元". 映射 $\mu \circ j_\alpha$ 同伦于恒同映射 $Y \to Y$.

我们也记得, 闭路空间 ΩM 为 $H-$ 空间. 映射 $\mu: \Omega M \times \Omega M \to \Omega M$ 由道路的乘积 (见 §7) 给出:

$$f \circ g = \mu(f, g),$$

即两条闭道相应的另一条闭道, 它由相继通过这两条闭道得到.

根据霍普夫定理 (见 §7), 任意 $H-$ 空间的在有理数域上的上同调代数同构于张量积 $\wedge[x_1,\cdots,x_t] \otimes \mathbb{Q}[y_1,\cdots,y_s]$, 其中 $\wedge[x_1,\cdots,x_t]$ 为奇次的生成元 $x_1,\cdots,x_t$ 的外代数; $\mathbb{Q}[y_1,\cdots,y_s]$ 为偶次的生成元 $y_1,\cdots,y_s$ 的多项式代数. 特别, 如果 $H-$ 空间为有限维的, 则其上同调代数同构于外代数 $\wedge[x_1,\cdots,x_t]$.

因为空间 ΩS^2 为 $H-$ 空间, 则 $H^*(\Omega S^2) \cong \wedge[x_1,\cdots,x_t] \otimes \mathbb{Q}[y_1,\cdots,y_s]$. 我们已经给出了两个生成元: $x_1 = a(\deg(a) = 1), y_1 = b(\deg(b) = 2)$; 因此所有的幂 $b^k, k = 1,2,3,\cdots$ 在代数 $H^*(\Omega S^2)$ 中不为零, 从而 $H^*(\Omega S^2)$ 包含子代数 $\wedge[a] \otimes \mathbb{Q}[b]$. 我们断言. 这个子代数完全给出了整个代数 $H^*(\Omega S^2)$. 事实上, 子代数 $\wedge[a] \otimes \mathbb{Q}[b]$ 在每个维数都包含了一个加法生成元 b^q (在形如 $2q$ 的维数, $q = 1,2,3,\cdots$) 或 $a \cdot b^q$ (在形如 $2q+1$ 的维数, $q = 0,1,2,3,\cdots$). 另一方

面, 从前已证明过, 空间 ΩS^2 的胞腔剖分在每一个维数正好有一个胞腔; 因此, 上面所讨论的环完全竭尽了整个代数 $H^*(\Omega S^2)$. 特别由此得到了整系数同调群 $H_p(\Omega S^2;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}, p=0,1,2,\cdots$. 因为这时胞腔 σ^i 为闭链.

最终的答案是:

1) $H^p(\Omega S^n;\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z}, \text{当 } p=k(n-1), k=0,1,2,3,\cdots;\\ 0, \text{当 } p \text{ 为其他情形};\end{cases}$

2) $H^*(\Omega S^{2n+1};\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[b_{2n}]; H^*(\Omega S^{2n};\mathbb{Q})=\wedge[a_{2n-1}]\otimes\mathbb{Q}[b_{4n-2}]$.

我们也将显示有关流形 M 的同伦和同调的知识是如何给出在黎曼流形 M^n 上的测地线的行为 (和存在性) 的完全描述. 例如运用上面所得到闭道空间 $\Omega S^n, n\geqslant 2$ 的同调群的知识得到:

命题 1 设 M^n 为黎曼流形, 它同伦等价于球面 $S^n, n\geqslant 2$. 于是有无穷多条连接任意两个非共轭点 $p,q\in M^n$ 的测地线.

这个命题立即由上面所证的关于闭道空间 ΩM^n 的结构基本定理和关于这个空间同调群的知识得到.

注 在定理 1 中建立了存在性的测地线是泛函空间 ΩM^n 的不同的点, 但是几何上 (在其实现为 M^n 中的光滑曲线时), 它们中一些可能重合 (例如, 球面 S^n 上的测地线). 对几何上不同测地线的个数如何算出的问题, 一般来说, 需要进一步的研究.

设 M^n 为紧光滑流形, 并设 $i>0$ 为第一个使群 $\pi_i(M^n)\neq 0$ 的指标. 于是对任意两个非共轭点 $p,q\in M^n$, 存在连接它们指数为 i 的测地线. 事实上, 因为 $\pi_i(M^n)=\pi_{i-1}(\Omega M^n)$, 则群 $H_{i-1}(\Omega M^n)$ 不为零; 故由闭道空间的胞腔分解定理知 ΩM^n 上的泛函 E 应至少有一个临界点 (即测地线), 其指数为 i. 论断得证.

如果流形沿任意的二维方向有负 (非正) 曲率, 则 (我们将在 §23 中证明) 泛函 E 在 $\Omega(M^n,p,q)$ 上所有的临界点有指数 0(即局部极小).

习题 1 由此得出, 连接点 p 和 q 的测地线自然地一一对应于 $\pi_1(M^n)$ 中的元.

§23. 变分法的周期问题

以前我们曾详细研讨过在黎曼流形 M^n 上的一维变分问题, 所涉及的是长度泛函 $L(\gamma)$ 和作用 $E(\gamma)$, 其中的 $\gamma\in\Omega(M^n,p,q)$, 而 p,q 是 M^n 上的两个固定点. 称这个变分问题为 "固定端点问题", 这是因为 $\gamma(0)=p,\gamma(1)=q,\gamma\in\Omega(M^n,p,q)$. 我们现在要转而研究的所谓 "闭极值曲线" 有着重要的意义. 这个

问题的研讨多少不同于“固定端点问题”的情形.

周期问题是按下述方式提出的. 我们考虑紧的光滑黎曼流形 M^n; 以 $\Pi(M^n)$ 记 M^n 上所有闭光滑曲线的空间, 即空间 $\Pi(M^n)$ 中的点是个光滑映射 $\gamma: S^1 \to M^n$, 其中的 $S^1 = S^1(t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 为圆, 具有标准的角坐标 t, 这时初始点不是固定的.

注　空间 $\Pi(M^n)$ (其拓扑完全同于在空间 $\Omega(M^n,p,q)$ 所引进的那样, 参看前面的内容) 不同于空间 $\bigcup\limits_p \Omega(M^n,p,p) = \widetilde{\Pi}(M^n)$, (其中 $p=q$); 存在映射 (并非纤维丛) $\Omega(M^n,p,p) \to \Pi(M^n)$, 在这里, 一个点的逆像是个圆. 空间 $\Pi(M^n)$ 的道路连通分支的集合, 由定义知, 是映射 $S^1 \to M^n$ 的“自由”同伦类的集合. 根据 [1], 卷 II, §17, 这个同伦类由群 $\pi_1(M^n)$ 的共轭类所决定.

结论　*假定流形 M^n 的道路上所定义的泛函一定在空间 $\Pi(M^n)$ 的每个道路连通分支上取得极小值. 则极小值的个数不小于群 $\pi_1(M)$ 中共轭类的个数.*

在这一节中, 我们将广泛地运用上一节所发展起来的研究空间 $\Omega(M^n,p,q)$ 中极值的工具, 从而将不再重复相似结构的构造了.

像空间 $\Omega(M^n,p,q)$ 那样, 空间 $\Pi(M^n)$ 可以以自然的方式转换为“无穷维流形”: 如果 $\gamma \in \Pi(M^n)$ 为一条闭轨线 (回忆一下, “轨线”这个词的理解是参数化的轨线, 就是说, 不同参数化的曲线是空间 $\Pi(M^n)$ 的不同点). 则“流形”$\Pi(M^n)$ 在点 $\gamma \in \Pi(M^n)$ 的“切空间”$T_\gamma\Pi(M^n)$ 由所有沿 γ 的光滑向量场构成 (即周期向量场). 在空间 $\Pi(M^n)$ 上的两个泛函 $L(\gamma)$ 和 $E(\gamma)$ (路径长和路径作用) 完全像在空间 $\Omega(M^n,p,q)$ 中那样定义. 我们来研究泛函 E 和 L 的极值.

引理 1　如果 $\gamma_0 \in \Pi(M^n)$ 为泛函 E 的闭极值曲线, 则 γ_0 为一条测地线, 其参数与自然参数成比例.

证明　证明直接由对空间 $\Omega(M^n,p,q)$ 的极值曲线的相应定理得到. 如果 $\gamma(t)$ 为对长度泛函 L 的周期极小曲线, 则用光滑参数变换 $t \to t'$ 由 $\gamma(t)$ 得到的所有轨线 $\gamma(t')$ 也是长度泛函 L 的极值曲线. 因此, 长度泛函 L 的“临界点”在空间 $\Pi(M^n)$ 中不是孤立的; 特别, 它们无论如何也不是泛函 E 的“孤立和非退化”的临界点.　□

因此,(如同空间 $\Omega(M^n,p,q)$ 的情形那样) 我们将集中注意于讨论泛函 E 的极值曲线. 我们注意到, 闭测地线 $\gamma_0(t) \in \Pi(M^n)$ 可能具有重数, 其意思是说, 作为光滑曲线, 当 t 从 0 变到 1 时, 集合 $\{\gamma_0(t)\}$ 的集合被经过了若干次. 见图 113. 如果在 M^n 中表为光滑曲线的测地线 $\gamma(t)$ 只经过了一次, 则称其为单 (一重) 测地线.

反之, 如果给出了某条单闭测地线, 则它也决定了无限的离散的闭测地线的序列. 它们由多次通过原来的曲线得到 (以比经过原来测地线更快的速度通过). 所有这些轨线都是空间 $\Pi(M^n)$ 中的不同点. 例如, 如果原来的轨线定义了基本群 $\pi_1(M^n)$ 中的一个非零元 (更准确地说: 它的不同于单位元的一个共轭类), 于是上面所描述的它的带重数的轨线已经属于群 $\pi_1(M)$ 的另一个共轭类了.

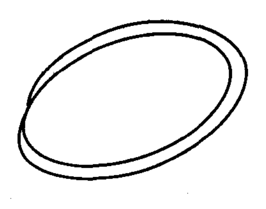


图 113 二重测地线

如同具固定端点的测地线那样, 每条闭测地线也自然地联系某个整数, 我们类比于以前的情形, 称为该测地线的退化次数. 定义将在后面给出; 如果这个退化次数等于零, 那么就称这个测地线为非退化的.

为了正确地定义闭测地线的*退化次数*, 我们考虑黑塞形式 d^2E (参看前面关于它的定义和性质: 在研究具固定端点测地线的那节可找到). 我们前面证过的"第二变分公式" 它具有形状

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(\widetilde{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}\Big|_{u_1=u_2=0} = -\int_0^1 \langle v_2, \nabla_{\dot{\gamma}_0}\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1 + R(\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_1)\dot{\gamma}_0\rangle dt,$$

其中 R 为黎曼曲率张量, $\dot{\gamma}_0$ 为该测地线的速度向量, 而向量场 v_1 和 v_2 由双参数变差所描述, 即无穷维流形 $\Pi(M)$ 在点 γ_0 的一对 "速度向量". 如同我们在前面所知道的, 沿轨线 γ_0 自身所定义的向量场 v_1 和 v_2 是光滑和周期的. 因为黑塞 d^2E 由在切空间 $T_{\gamma_0}\Pi(M^n)$ 上的双线性对称形式定义, 因而可以唯一地由它对应的线性微分算子给出, 显然它具有下面的形状: $D = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 - R(\dot{\gamma}_0)\dot{\gamma}_0$. 在这里我们按与有限维情况的类比进行: 当给出双线性函数时就意味着给出了一个线性算子 D, 利用它, 想要的形式 B 便由公式 $B(x,y) = \langle x, Dy\rangle$ 给出.

在我们的情形, 算子 D 在 "切向量"$v \in T_{\dot{\gamma}_0}\Pi(M)$ (即在沿闭测地线 γ_0 定义的光滑周期向量场) 上的作用由下面的公式实现:

$$D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 \equiv -[(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 + R(\dot{\gamma}_0, \cdot)\dot{\gamma}_0](v).$$

回想一下, 称 "切向量" v (即周期向量场) 为雅可比场是说, 如果这个场被算子 D 零化, 即是下面微分方程的解: $D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0$. 显然, 这个定义完全模仿了固定端点的测地线的情形. 那么, 雅可比场 (雅可比 "切向量") 是线性算子 D 的核中的元素, 其中 D 作用在切空间 $T_{\gamma_0}\Pi(M^n)$ 上.

定义 1 称算子 D 的核的维数为闭测地线 γ_0 的*退化指数*.

完全像在固定端点的测地线的情形, 可证明这个数为有限 (参看前面).

定义 2 如果闭测地线的退化指数为零则称其为*非退化闭测地线*.

为简明起见, 在以后的讨论中我们主要局限于闭的非退化测地线. 原来, 每条测地线自然地与一个整数相关联, 这个整数叫做 "测地指数". 要定义它又要回到算子 D. 可以以某个不同的方式来定义这个指数. 事实上, 因为在切空间 $T_{\gamma_0}\Pi(M^n)$ 上把黑塞形式 d^2E 化为标准型后, 指数等于负的平方个数. 于是, 沿着每个 "切向量" $v \in T_{\gamma_0}\Pi(M)$, 其中的这个 v 对应于形式 d^2E 中的负平方中的一个, 这个形式为负定; 因此这个 "切向量" 是算子 D 的特征向量, 其特征值为 $\lambda < 0$. 因此, 黑塞形式 d^2E 的指数可以直接定义为下面的微分方程的线性无关解的个数: $D(v) = \lambda v, \lambda < 0$ (这是个带参数 λ 的微分方程组, 其中 λ 为特征值). 那么, 方程 $D(v) = \lambda v, \lambda < 0$ 的解是沿测地线 γ_0 的光滑周期向量场 (当然, 如果这些解一般是存在的). 这里的情形不同于雅可比 "切向量" 的情形: 在那里至少总存在一个齐次方程组的零解; 在 $\lambda < 0$ 的情形, 解可能不存在: 这时我们说, 闭测地线的指数为零.

定义 3　称微分方程组

$$D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0$$

的线性无关解的个数为**闭测地线的非退化指数**.

在固定端点的测地线的情形, 也能应用这个定义.

重要附注　当然, 我们上面所定义的闭测地线的指数也与沿这条测地线的此线上选定的起点相共轭的点的分布有关, 但是这种相关性比起在固定端点测地线的情形具有更复杂的特性, 故而在这里我们不打算详细阐述.

习题 1　证明这个指数不小于共轭点的个数 (但可以不相等).

在某种意义下,"变分法的周期问题" 的研究比起具固定端点的测地线的研究更为复杂. 重测地线的存在在很大程度上说明了所出现的难点的特点; 例如, 求出单 (非重的) 闭测地线的数量远不是平凡的问题.

为了简化对闭测地线问题的研究, 我们在这里只选取一个例子: 具负曲率的黎曼流形的情形, 即那样的流形, 在其上沿所有二维方向的曲率 (即截面曲率) 全都为负. 我们所熟知的这种流形的例子是罗巴切夫斯基平面, 它在标准度量下具常负曲率; 还有那些二维光滑闭流形, 它们是由罗巴切夫斯基平面在离散群的等距作用下得到的商空间, 其中这个离散群同构于曲面的基本群 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §20 关于在罗巴切夫斯基平面上的晶体群的内容). 为简单起见, 我们常常假设所讨论流形是紧的.

定理 1 设 M 为具负曲率的紧光滑黎曼流形. 于是在每个自由的一维同伦类中存在唯一的闭测地线.

证明 考虑某个自由闭道的固定类, 类中的闭道相互同伦. 假设我们只考虑光滑的闭轨线; 对每条轨线给一个在此轨线上的泛函 E 的值; 我们考虑数 c, 它是所有这些泛函值的下确界; 于是一般说来, 存在闭道的无限序列, 其长度收敛于数 c. 由此流形的紧性, 在这个序列中可挑出一个曲线的序列, 它逐点收敛于某个光滑曲线 γ_0, 容易验证它是一条闭测地线, 而泛函 E 的值在这条测地线上等于 c. 还要证明这条测地线的唯一性. 为此我们需要一个重要引理, 其意义不只是在证明我们的定理时有用.

引理 2 设 γ_0 为流形 M 上的闭测地线, 其中 M 具负曲率 (在这里没有假定 M 的紧性). 于是这条测地线非退化, 并且它的测地指数为零, 换句话说, 微分方程 $D(v)=\lambda v, \lambda<0$ 没有任何非零解, 而方程 $D(v)=0$ 只有零解.

证明 先考虑方程 $D(v)=0$ 的情形. 需要证明它没有非零解. 设 v 是个非零解. 则有 $(\nabla_{\dot\gamma_0})^2 v+R(\dot\gamma_0,v)\dot\gamma_0=0$, 由此 $\langle(\nabla_{\dot\gamma_0})^2 v,v\rangle=-\langle R(\dot\gamma_0,v)\dot\gamma_0,v\rangle>0$, 这是因为量 $\langle R(\dot\gamma_0,v)\dot\gamma_0,v\rangle$ 恰好是在轨线 γ_0 的每一点上两个向量 $\dot\gamma_0$ 和 v 给出的二维方向上的截面曲率. 于是

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\nabla_{\dot\gamma_0}v,v\rangle&=\nabla_{\dot\gamma_0}\langle\nabla_{\dot\gamma_0}v,v\rangle=\langle(\nabla_{\dot\gamma_0})^2v,v\rangle+\langle\nabla_{\dot\gamma_0}v,\nabla_{\dot\gamma_0}v\rangle\\
&=\langle(\nabla_{\dot\gamma_0})^2v,v\rangle+|\nabla_{\dot\gamma_0}v|^2>0,
\end{aligned}
$$

即函数 $\langle\nabla_{\dot\gamma_0}v,v\rangle$ 随 t 沿 $\gamma_0(t)$ 增加而严格地单调增加.

我们考虑在轨线 $\gamma_0(t)$ 上的任意的固定点, 譬如 $\gamma_0(0)$. 解 $v(t)$ 是参数 t 的函数; 研究这个解随 t 变化时的行为. 第一种情形: 在点 $\gamma_0(0)$ 有不等式 $\langle\nabla_{\gamma_0}v,v\rangle|_{t=0}\geqslant 0$. 于是对于所有 $t>0$ 我们有

$$
\frac{d}{dt}\langle v,v\rangle=\nabla_{\dot\gamma_0}\langle v,v\rangle=2\langle\nabla_{\dot\gamma_0}v,v\rangle>0,
$$

其理由是 $\langle\nabla_{\dot\gamma_0}v,v\rangle$ 是严格递增的函数. 第二种情形: 在点 $\gamma_0(0)$ 满足不等式 $\langle\nabla_{\dot\gamma_0}v,v\rangle|_{t=0}<0$. 于是代替考虑轨线 $\gamma_0(t)$, 我们考虑轨线 $\gamma_0(-t)$, 即变换参数 t; 这时, 在每个点的速度向量 $\dot\gamma_0$ 被替换为反向的 $-\dot\gamma_0$; 因此, 对所有 $t>0$ 有

$$
\left.\frac{d}{dt}\langle v,v\rangle\right|_{t\to -t}=2\langle\nabla_{\dot\gamma_0}(-t)v,v\rangle-2\langle\nabla_{\dot\gamma_0}v,v\rangle>0.
$$

那么可以假定, 或沿轨线 $\gamma_0(t)$ (即按参数的正方向) 或沿轨线 $\gamma_0(-t)$ (即按参数的负方向) 向量 v 的模单调递增; 但是因为轨线为闭, 故经过一段时间后我们又重新回到了原来的点, 只是向量 v 的模增大了; 因为假定了函数 v 沿 γ_0 的

光滑性, 从而得到了矛盾. 故引理在方程 $D(v)=0$ 的情形得证. 现在考虑方程 $D(v)=\lambda v, \lambda<0$. 因为 $D(v)=-(\nabla_{\dot\gamma_0})^2v-R(\dot\gamma_0,v)\dot\gamma_0=\lambda v$, 于是由 $\lambda<0$ 得

$$(\nabla_{\dot\gamma_0})^2v+R(\dot\gamma_0,v)\dot\gamma_0=-\lambda v,$$
$$\langle(\nabla_{\dot\gamma_0})^2v,v\rangle=-\langle R(\dot\gamma_0,v)\dot\gamma_0,v\rangle-\lambda\langle v,v\rangle>0.$$

就是说, 我们用了条件 $\lambda<0$. 后维的讨论完全重复前面; 由此得知 $Dv=\lambda v$ 没有解. 引理完全得证. □

回到定理的证明. 考虑闭测地线 γ_0, 它属于一个给定的自由同伦类 (见前面的证明). 由所证的引理知道, 这个测地线是非退化的. 特别地, 它是孤立的. 因为, 由引理, 它的指数为 0, 从而作为闭曲线空间上的函数的泛函 E 在点 γ_0 取得局部极小. 我们假设在所给的同伦类中有某个这样的局部极小 (即某个闭测地线). 选取任意两条闭测地线 γ_0 和 γ_0'. 因为它们两个都非退化, 故它们均为孤立的, 并且函数 E 在它们上都有严格的局部极小 (见图 114). 因为 γ_0 和 γ_0' 属于同一个自由同伦类, 故存在轨线 τ 连接这两个在空间 $\Pi(M)$ 中的点, 即存在同伦把 γ_0 转换为 γ_0'. 考虑泛函 E 限制在轨线 τ 时的行为. 按有限维情形那样进行, 我们便得到了结论: 存在这样的轨线 τ, 沿着它泛函 E 在点 γ_0 和 γ_0' 之间还有一个临界的鞍点 α; 见图 115. 但是这个点已不可能是个局部极小, 它与我们上面所证引理相矛盾. 因此 γ_0 和 γ_0' 重合. 于是在自由同伦类中只有一个局部极小; 它甚至是个绝对极小, 而其他的测地线 (除去重测地线) 则不是. 定理证完. □

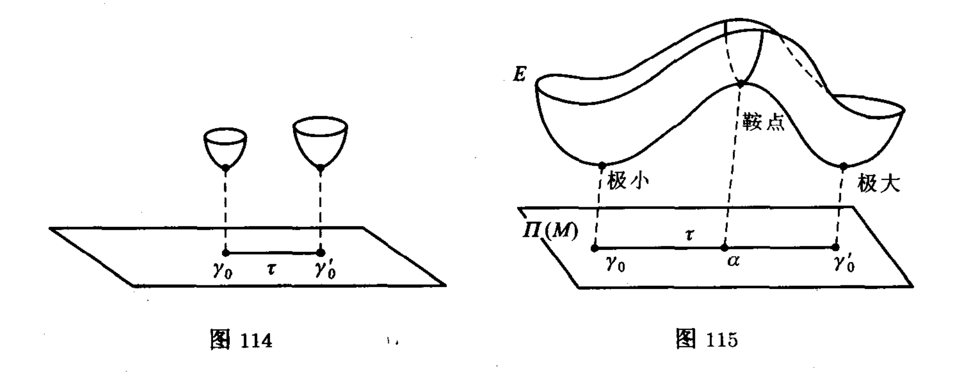


图 114　　图 115

由上面所证明的引理推出对非紧的具负曲率流形的推论.

定理 2 设 M 为光滑流形, 它对所有二维方向具有负曲率. 于是流形 M 上没有任何两个点沿测地线共轭.

证明 应该证明方程 $D(v)=0$ 除去 0 以外没有任何其他解. 立即从引理推出, 从而完成证明. □

定理 3 设 M 为具负曲率的 (对所有二维方向) 单连通光滑流形, 并且它的任意两个点可由测地线相连接. 于是流形 M 上任意两个点可用唯一的一条极小测地线相连接. 这个流形 M 微分同胚于欧氏空间.

证明 因为 M 为单连通, 则空间 $\Omega(M,p,q)$ 连通. 由于没有共轭点 (见上面), 每条测地线的指数为零. 由莫尔斯定理知道, 空间 $\Omega(M,p,q)$ 具有胞腔复形的同伦型, 其维数等于零, 并且每条测地线对应于一个零维胞腔 (点). 由于连通性, $\Omega(M,p,q)$ 只有一个顶点, 故而点 p 和 q 有唯一的测地线相连接. 因此切空间到流形间的指数映射是相互一一的, 从而定理得证. □

我们发现, 某个群是负曲率流形的基本群这件事必定在这个群上要附加相当强的条件 (我们记得, 任意有限生成群可以实现为四维的紧流形的基本群; 同时, 远不是每个群都是三维紧流形的基本群, 例如 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$). 成立下面的命题.

定理 4 设 M 为具负曲率的流形. 如果基本群 $\pi_1(M)$ 中两个元素相互交换, 则它们两个属于在群 $\pi_1(M)$ 中的一个循环子群.

证明 设 a 和 b 为两个相互交换的元素. 如果它们属于一个循环子群则命题得证. 设它们不属于同一个循环子群. 于是可以构造从二维环面 T^2 到流形 M 的光滑映射, 这个 T^2 实现了所提到两个元素 a 和 b 的交换条件. 事实上, 交换性条件可写成形状 $aba^{-1}b^{-1}=1$, 从而可定义环面 T^2 到 M 的映射 (参看图 116). 这时交换元 a 和 b 就是这个环面的子午线和平行圆 (它们标准地嵌入到环面中). 而负曲率条件使得有光滑形变, 能将这个环面变成为另一个环面, 使它能作为全测地子流形嵌入到 M 中. 为此, 应该考虑 M 中具有极小面积的嵌入环面. 我们只应用这个极小环面存在性定理而不加以证明, 因为极小解存在的事实是相当不平凡的, 它构成了著名的普拉托 (Plateau) 问题的内容. 上面所提及的极小位置将此环面作为 M 的二维极小子流形. 因为环面是二维的, 故可以在其上选取共形坐标, 在此坐标下环面在 M 中的嵌入成为调和映射 (这是二维流形的特性, 对它成立单值化定理). 由此已足以看出, 环面被作为全测地子

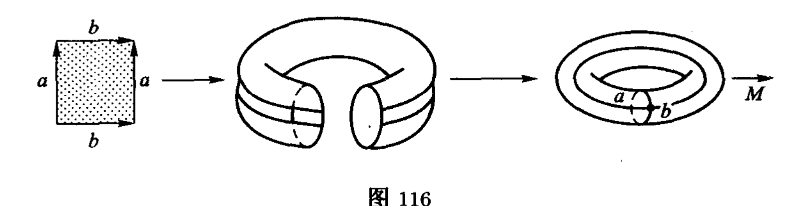


图 116

流嵌入到 M 中, 即作为那样的子流形, 使得在它上面的每一条测地线 (在所诱导的黎曼度量下) 同时也是在它的承载黎曼流形上的测地线. 因为承载流形具

负曲率, 且因为环面是全测地的, 从而得到在二维环面上的负高斯曲率的诱导黎曼度量 (我们记得, 二维曲面的高斯曲率是个内蕴不变量, 等同于它的纯量曲率, 就是说, 在所给的情形中, 按二维方向的曲率与按该环面的切平面方向的曲率相同). 然而在二维环面上不可能引进这样的度量: 因为高斯曲率在环面上的积分将不为零, 这与高斯 - 博内公式矛盾; 按这个公式, 该积分等于环面的欧拉示性数 (在对此积分除以 2π 之后); 它等于 0. 由此矛盾知定理成立. □

§24. 三维流形上的莫尔斯函数和赫戈图

我们考虑三维光滑紧连通闭流形 M^3 (为简明起见, 假设流形 M^3 为定向); 设 f 为在此流形上的光滑莫尔斯函数正好有一个极小 (它就是绝对极小), 一个极大 (绝对极大), 并且有几个指数为 1 和 2 的点. 如同在前面证明过的, 在所有这些莫尔斯函数中可以选出这样的函数, 它的临界点能在下面的意义下排序, 即函数 f 的值列在线段 $[0,1]$ 上; $f(p)=0, f(p')=1$, 其中 p 和 p' 分别是极小点和极大点. 另外, 所有指数为 1 的临界点分布在水平曲面 $f=\frac{1}{3}$ 上; 所有指数为 2 的临界点分布在水平曲面 $f=\frac{2}{3}$ 上. 我们以 $x_1,\cdots,x_{q_1}$ 记指数 1 的临界点, 以 $y_1,\cdots,y_{q_2}$ 记指数 2 的点. 由庞加莱对偶 (在定向情形的系数群为整数) 立即推出 $q_1=q_2$, 即指数 1 的临界点数等于指数 2 的点数.

考虑水平曲面 $M^2=\left\{f=\frac{1}{2}\right\}$; 因为在其上没有临界点, 而维数等于 2, 则 M^2 微分同胚于二维光滑紧连通闭流形. 由于 M^2 为水平曲面, 是由不等式 $\frac{1}{2}\leqslant f\leqslant 1$ 定义的三维流形的边缘, 从而 M^2 是定向曲面, 就是说, 同胚于带有几个环柄的球面. 设 r 为曲面 M_r^2 的亏格 (即环柄数). 从构造知道, M_r^2 同时是两个三维流的边缘流形: $\left\{\frac{1}{2}\leqslant f\leqslant 1\right\}$ 和 $\left\{0\leqslant f\leqslant\frac{1}{2}\right\}$, 我们分别以 Π_1 和 Π_2 表示它们. 从直观上, 可以把 Π_i 中每一个 (顺便说, 它们是同胚的) 看成是二维曲面 M_r^2 (亏格 r) 被填满的三维体, 以标准方式嵌入到三维欧氏空间中. 因此我们已证明了下面的论断.

定理 1 任意三维光滑紧连通闭流形可以被表示为 (非唯一) 两个三维有边缘流形 $\Pi_i, i=1,2$ 的 “粘合”, 它们中的每一个都同胚于一个标准的三维流形 Π, 即在三维欧氏空间中的一个区域, 它的边缘是嵌入在它中的亏格 r 的曲面 (某个 r). 这个流形 Π_1 和 Π_2 的粘合是按照边缘的某个微分同胚 α 进行的.

所提到的把 M^3 表示为 Π_1 和 Π_2 的粘合: $M^3=\Pi_1\bigcup_{\alpha}\Pi_2, \alpha: M_r^2\to M_r^2$, 当然不是唯一的. 另外, 数 r 也依赖于 M^3 上的莫尔斯函数的选取. M^3 为两个实心的亏格 r 曲面的粘合, 这种表示通常称做流形 M^3 的 “赫戈(Heegaad)图”; 因为上面所描述的粘合由微分同胚 $\alpha: M_r^2\to M_r^2$ 给出, 于是, 如果给出了微分同

胚 α 有时就说给出了赫戈图. 显然, 如果两个微分同胚 α_1 和 α_2 在微分同胚类中同伦, 则对应的三维流形 $M^3(\alpha_1)$ 与 $M^3(\alpha_2)$ (分别按 α_1 和 α_2 粘合得到) 同胚.

反之, 设给了某个赫戈图, $M^3(\alpha)$ 为其对应的三维流形. 于是可以在这个流形 $M^3(\alpha)$ 上构造出适当的莫尔斯函数 f, 它定义了 (见上面) $M^3(\alpha)$ 的一个剖分, 分其为两个流形 Π_1 和 Π_2 的并, 并且与原来的赫戈图相同. 事实上, 因为 $M^3(\alpha) = \Pi_1 \bigcup\limits_{\alpha} \Pi_2$, 故只要分别在 Π_1 和 Π_2 上构造标准的莫尔斯函数 f_1 和 f_2, 各具指数 1 和 2, 函数 f_1 还有一个指数 0 的临界点, 函数 f_2 具有一个指数为 3 的临界点; 这时的函数 f_1 和 f_2 应该如此选取, 使得它们在 Π_1 和 Π_2 的边缘上为常数. 以所给出的微分同胚粘合 Π_1 和 Π_2 得到了在 M^3 上具有所要的全部性质的莫尔斯函数.

称数 r (曲面 M_r^2 的亏格) 为**赫戈图的亏格**.

上面所证明的定理可重新阐述为下面的形式.

命题 任意三维的连通光滑的定向紧闭流形可以表示为两个三维带环柄的球的并, 这两个带柄球的表面通过某个同胚映射 (微分同胚) 等同.

上述的阐述是这样实现的: 流形 Π_1 和 Π_2 中每一个都同胚于带 r 个环柄的球体.

当 $r=0$ 时, 流形 $M^3(\alpha)$ 由粘合两个三维球得到, 它们的边缘由微分同胚 α 等同, 就是说, 按二维球面自身的一个微分同胚进行粘合. 显然, 由此知 $M^3(\alpha)$ 微分同胚于标准的三维球面. 我们考虑一个更不平凡的情形, 并写出所有亏格 1 的赫戈图, 即写出所有那些三维流形, 它们由两个实心环面 $\Pi_1 = S^1 \times D^2, \Pi_2 = S^1 \times D^2$ 粘合而成; 这个粘合利用了它们边缘的微分同胚 $\alpha : T^2 \to T^2$, 其中的 T^2 是二维环面.

定理 2 任意三维光滑的紧闭连通流形, 如有亏格 1 的赫戈图, 则同胚 (从而微分同胚) 于下列三维流形中的一个: 1) 标准的球面 S^3; 2) $S^1 \times S^2$; 3) 透镜空间 $L^3(1,k)$, 它由三维球面 S^3 用群 $\mathbb{Z}_p$ 的光滑作用得到的商空间, 这个作用的公式是

$$(z,w) \to \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z, e^{\frac{2\pi i k}{p}} w\right),$$

其中 (z,w) 为空间 $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ 的复坐标; $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$. 透镜空间 $L^3(1,1) = S^2/\mathbb{Z}_2$ 微分同胚于实射影空间 $\mathbb{R}p^3 (p=2)$.

证明 由于有前面的定理, 只需给出二维环面到自身的所有微分同胚的同痕类的分类. 因为环面为 $K(\pi,1)$ 型的空间, 故而自身的连续映射的同伦分类由基本群 $\pi_1(S^1 \times S^1)$ 到自己的同态的集合给出. 因为我们只希望局限于微分同胚, 则只需描述出所有 $\pi_1(S^1 \times S^1)$ 到自身的同构即可. 由于群 $\pi_1(T^2)$ 同构于

$\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}$, 于是环面自身的所有微分同胚 α (保定向) 被行列式为 1 的整数矩阵给出: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc=1$; 如果这个微分同胚改变了方向, 则 $ad-bc=-1$. 假定在这个环面上固定了一条水平圆和子午线, 它们组成了基本群的基 (它们也是同调群的基); 相对于它们可写为矩阵 $\alpha_*=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 我们来求流形 $M^3(\alpha)$ 的基本群, 其中 $\alpha_*=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc=1$. 因为 M^3 被表示为两个实心环粘合的形状, 它们中每一个同伦等价于一个圆于是 M^3 的基本群可以这样得到: 需要考虑生成元 γ_1 和 γ_2, 并给出 γ_1 和 γ_2 之间的关系, 在我们的具体情况中具有形状 $\gamma_1^c=\gamma_2^c=1$ (乘法群). 由此得到 $\pi_1(M^3(\alpha))=\mathbb{Z}_c$. 例如, 如果 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 具 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的形状, 则对应的流形 M^3 同胚于直积 $S^1\times S^2$; 如果 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 M^3 同胚于球面 S^3. 在第一种情形 $\pi_1(M^3)=\mathbb{Z}$, 在第二种情形 $\pi_1(M^3)=0$. 刚才提到的两个同胚在几何上是显然的: 第一种情形中, 圆 S^1 对应于一个实心环的中心轴, 而二维球面是对两个二维圆盘的边缘由恒同映射等同的结果而出现的 (具粘合的矩阵); 在第二种情形, 这两个实心环是这样粘合的: 平行圆和子午线调换了位置 (保持环面的定向); 三维球面的相应剖分为两个实心环的和可以这样给出:

$$\Pi_1=S^3\bigcap\{|z|\geqslant|w|\},\quad \Pi_2=S^3\bigcap\{|z|\leqslant|w|\},$$

存在球面的正交变换, 它将 Π_1 变到 Π_2 (及反向的), 由公式 $(z,w)\to(w,z)$ 给出. 因此, 我们找到了流形 $M^3(\alpha)$ 的基本群, 其中的 α 给出了亏格 1 的赫戈图. 如果群 $\pi_1(M^3(\alpha))$ 为平凡, 则 $M^3(\alpha)$ 同伦于球面 (这立刻由庞加莱对偶得到), 它表示为同胚于标准球面的两个实心环的粘合.

如果 $\pi_1(M^3(\alpha))=\mathbb{Z}$, 则 $c=0$, 即 $ad=1$; 由此, 或 $a=d=1$, 或 $a=d=-1$ (b 的值不是本质性的). 可以清楚看到, 由整数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 给出的流形 $M^3(\alpha)$ 同胚于 $S^1\times S^2$.

如果 $\pi_1(M^3(\alpha))$ 非平凡并同构于 $\mathbb{Z}_c, c\neq 0,1$, 当转向它的覆叠 $\widetilde{M}^3(\alpha)$ 时, 因为这个环面上的覆叠是正则的, 从而仍是个环面, 故它仍具有亏格 1 的赫戈图; 除此之外, 由于 $\widetilde{M}^3(\alpha)$ 的基本群为平凡, 所以从前面的讨论知道 $\widetilde{M}^3(\alpha)$ 同胚于标准的球面. 由此得出, 它原来的流形 $M^3(\alpha)$ 是由标准的三维球面对于群 $\mathbb{Z}_c$ 作用所得到商空间 (这里的作用已在前面写出). 定理证完. □

这样简单的答案只可能在亏格 1 的赫戈图时得到; 如果流形 M^3 不具有任一个亏格 1 的赫戈图, 那么对 M^3 的描述则是十分复杂的.

我们来补充一些关于透镜流形 $L^3(1,k)$ 的知识. 如同从 $\mathbb{Z}_c$ 在 S^3 上光滑作用的定义所看到的那样, 商空间是个流形, 而投射 $S^3 \to L^3(1,k)$ 为覆叠映射 ($\mathbb{Z}_c$ 在 S^3 上的作用是自由和有效的). 显见, 所有透镜流形都具有亏格 1 的赫戈图. 事实上, 方程 $|z|=|w|$ 给出 S^3 的一个分解, 分解为两个标准实心环的和 (见前面的描述): $S^3 = \Pi_1 \bigcup \Pi_2$. 在群 $\mathbb{Z}_c$ 的作用 $(z,w) \to \left(e^{\frac{2\pi i}{c}}z, e^{\frac{2\pi ik}{c}}w\right)$ 下, 环面 $|z|=|w|$ 变到自己, 从而 S^3 在 $\mathbb{Z}_c$ 作用下到商空间时, 环面 $|z|=|w|$ 投射到环面上, 它就是透镜流形 $L^3(1,k)$ 的赫戈图的环面. 显然, 所出现的环面到自己的映射 (覆叠) 可以用矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 来描述.

容易证明, 透镜空间 $L^{2n-1}(p_1,\cdots,p_n)$ 和 $L^{2n-1}(p'_1,\cdots,p'_n)$ 由群 $\mathbb{Z}_c$ 在 S^{2n-1} 作用得到, 这个作用的公式为

$$(z_1,\cdots,z_n) \to \left(e^{\frac{2\pi ip_1}{c}}z_1, e^{\frac{2\pi ip_2}{c}}z_2,\cdots,e^{\frac{2\pi ip_n}{c}}z_n\right).$$

(相应地对 $p'_1,\cdots,p'_n$); 如果对每个 i, 和 $p_i+p'_i$ 或差 $p_i-p'_i$ 为 c 的倍数, 则这两个空间同胚.

对所有三维流形的分类问题不仅没有解决, 而且甚至也不知道它在某种准确的意义下是否是算法可解的 (像二维流的分类问题的算法可解性那样).

像前面所证, 为构造一个包含所有三维流形的列表 (这个问题不同于分类问题而是更为简单) 只需构造亏格 r 的曲面到自己的微分同胚的同痕类的列表. 结果表明, 这样的列表可以造出来. 在图 117 中显示了亏格 r 的二维曲面, 它有三个定向的圆族 c_i, e_i, f_i. 对应于曲面 M_r^2 上的圆 s 的运算 $T_s^\varepsilon(\varepsilon=\pm1)$ 是下面的微分同胚 $T_s^\varepsilon: M_r^2 \to M_r^2$. 以 U_ε 表示圆 s 的闭 λ- 邻域, 就是说 U_s 同胚于 $S^1\times[0,1]$. 定义 T_s^ε 为在 $M_r^2\backslash U_\varepsilon$ 上为恒同映射, 而微分同胚 $T_s^\varepsilon: U_s \to U_s$ 构造为将圆 $S^1\times t$ 旋转了角 $2\pi t$, 同时符号 ε 依赖于旋转的方向. 有下面极其重要和非平凡的事实 (我们略去了它的证明): 二维曲面 M_r^2 自身的微分同胚的任意同痕类包含了一个表示, 它可分解为形如 T_s^ε 的运算积 (复合), 其中 s 为这三个圆族 c_i, e_i, f_i 中的任一个圆. 由此得出推论: 考虑所有可能的有限乘积 $\Pi T_{s_j}^{\varepsilon_j}, s_j \in (\{c_i\},\{e_i\},\{f_i\})$, 则可以建立二维曲面 M_r^2 的微分同胚的同痕类的列表.

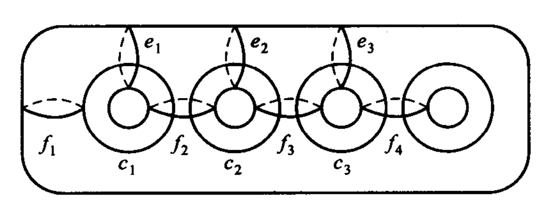


图 117

§25. 博特的酉周期性和高维变分问题

在这一节我们将证明一个重要的拓扑事实, 通常称其为 "博特 (Bott) 周期性". 为简单起见, 我们只对酉群建立这个周期性定理 (所谓的正交博特周期性可按与酉周期性同样的方案证明, 只是在技术上具有更大的复杂性).

I. 酉周期性定理.

我们将证明的周期性定理是它的经典形式, 即稳定酉群的同伦群的周期性定理, 而不在这里去深入了解向量丛理论中的周期性定理的作用.

酉周期性定理 成立同构: 当 $1 \leqslant i \leqslant 2m, \pi_{i-1}(SU_{2m}) \cong \pi_{i+1}(SU_{2m})$. 如果 $U = \varinjlim_{(m)} U_m$ (其中 $U_m \subset U_{m+1}$ 为标准的嵌入), 如果 $i \geqslant 1$, 则 $\pi_{i-1}(U) = \pi_{i+1}(U)$, 从而 $\pi_{2n}(U) = 0, \pi_{2n+1}(U) = \mathbb{Z}$.

我们考虑特殊酉群 SU_{2m}, 并以 $\Omega(SU_{2m}, E_{2m}, -E_{2m})$ (其中 $E_{2m} \in SU_{2m}$ 为恒同变换) 表示在群 SU_{2m} 中从点 E_{2m} 出发到点 $-E_{2m}$ 的分段光滑的道路构成的空间. 以 $\Omega^*(SU_{2m}, E_{2m}, -E_{2m})$ 表示所有从 E_{2m} 到 $-E_{2m}$ 的连续道路的完备空间; 于是嵌入 $\Omega \to \Omega^*$ 为同伦等价 (参看上面对光滑流形上闭道空间上一般莫尔斯理论的部分).

在空间 $\Omega(SU_{2m}, E_{2m}, -E_{2m})$ 中考虑由所有极小测地线 γ (即具最小长的测地线) 组成的空间 $\widetilde{\Omega}$, 其中的每条测地线都从点 E_{2m} 出发到达点 $-E_{2m}$.

引理 1 空间 $\widetilde{\Omega}$ 同胚于复格拉斯曼流形 $G^{\mathbb{C}}_{2m,n}$, 即在复线性空间 $\mathbb{C}^{2m}$ 中的 m 维复平面空间.

证明 如同在 [1], 卷 I 中已证的, 在李群上的测地线 (相对于与群的不变度量相容的黎曼联络) 是它所有的单参数子群和它的乘法群中某个元和位移. 故而为了描述出所有在群 SU_{2m} 中连接点 E_{2m} 和 $-E_{2m}$ 的测地线, 只需描述出所有从点 E_{2m} 出发而终止于点 $-E_{2m}$ 的所有单参数子群就可以了. 因为 SU_{2m} 中任意的那种一维子群 $\gamma(t)$ 具有形状 $\exp tX$, 其中 X 为反埃尔米特矩阵 (即属于群 SU_{2m} 的李代数 su_{2m}), 于是在假定参数 t 从 0 到 1 变化时得到了条件: $\gamma(0) = E_{2m}, \gamma(1) = \exp X = -E_{2m}$. 考虑群 SU_{2m} 在它的李代数上的伴随作用 Ad. 一个熟知结果 (只需由在酉矩阵情形中用经典的正交化过程) 是: 存在那样的酉变换 $g_0 \in SU_{2m}$, 使 $g_0 X g_0^{-1} = X_0$, 其中

$$X_0 = \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_{2m} \end{pmatrix}, \varphi_1 + \cdots + \varphi_{2m} = 0.$$

换句话说, 矩阵 X_0 属于代数 su_{2m} 的嘉当 (Cartan) 子代数 (即 su_{2m} 的最大交

换子代数). 用变换 Ad_{g_0} 到测地线 $\gamma(t)$ 得到

$$g_0(\exp X)g_0^{-1}=\exp(g_0Xg_0^{-1})=\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_{2m}} \end{pmatrix}$$
$$=g_0(-E_{2m})g_0^{-1}=-E_{2m}.$$

由此有 $\varphi_i=\pi k_i, k_i=2l_i+1, 1\leqslant i\leqslant 2m, l_i\in\mathbb{Z}; k_1+\cdots+k_{2m}=0$. 于是我们描述了所有连接在 SU_{2m} 中两个点 E_{2m} 和 $-E_{2m}$ 的测地线. 还需在它们中选出最小长度的测地线. 因为映射 exp 等距地表现为把直线 tX 映射到测地线 $\exp(tX)$, 故只要求出在其李代数中相应的线段, 以计算从 E_{2m} 到 E_{-2m} 沿测地线 $\exp(tX)$ 的距离. 在李代数 su_{2m} 上的基灵 (Killing) 度量的形式为 $\mathrm{tr}X\overline{Y}^{\mathrm{T}}=\langle X,Y\rangle$; 于是测地线 $\exp(tX)$ 从 E_{2m} 到 $-E_{2m}$ 的长等于

$$\sqrt{\langle X,X\rangle}=\sqrt{\mathrm{tr}X\overline{X}^{\mathrm{T}}}=\pi\sqrt{\sum_{i=1}^{2m}(k_i)^2}.$$

由此显见, 测地线的最小长等于 $\pi\sqrt{2m}$, 即 $k_i=\pm1$. 除此之外, 还因为 $\mathrm{tr}X=\pi\sum\limits_{i=1}^{2m}k_i=0$, 故矩阵 X 在对角线上等于数 $+1$ 和 -1. 于是我们证明了所有矩阵 X 为 $\exp\overline{X}=-E_{2m}$, 并且最短测地线 $\exp tX$ 由下面一个固定的矩阵

$$X_0=\begin{pmatrix} i & & & & & & 0 \\ & i & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & i & & & \\ & & & & -i & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} iE_m & 0 \\ 0 & -iE_m \end{pmatrix}$$

通过对其应用形如 $X_0\to gXg^{-1}$ 的内自同构得到, 其中的元素 g 历遍整个群 SU_{2m}. 因此我们建立了所有极小测地线集合与形如 $gX_0g^{-1}, g\in SU_{2m}$ 之间的同胚. 另一方面, 这个矩阵的集合显然同胚于齐性空间 SU_{2m}/CX_0, 其中的 CX_0 代表了矩阵 X_0 的平稳子群 (即在群 SU_{2m} 的伴随作用下保持 X_0 不动的子群). 因为显然存在有同构: $CX_0\cong S(U_m\times U_m)$, 故空间 SU_{2m}/CX_0 同胚于格拉斯曼复流形 $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$. 引理得证. □

引理 2 连接点 E_{2m} 与点 $-E_{2m}$ 的每条极小测地线 $\gamma(t)$ 唯一地由它自己的中点 $\gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 给出. 因此, 极小测地线的集合, 也就是它的中点的集合同胚于

格拉斯曼流形, 并且另一方面, 它等于群 SU_{2m} 和它的李代数 su_{2m} 的交; 这时我们假定了群 SU_{2m} 和李代数 su_{2m} 都作为在欧氏空间 $\mathbb{R}^{2m^2}$ 中的子集合, 其中 $\mathbb{R}^{2m^2}$ 看作是 $m\times m$ 阶复矩阵.

证明　命题的第一部分, 即每条极小测地线唯一地由它的中点给出, 由公式 $\exp(tX)=(\cos\pi t)E_{2m}+(\sin\pi t)X$ 得到. 当 $t=0$ 得到 E_{2m}, 当 $t=1$ 得到点 $-E_{2m}$, 而当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时得到矩阵 X. 于是测地线 $\gamma(t)$ 的中点同于矩阵 X. 显然形如 gX_0g^{-1} 的矩阵 X 的集合等同于那些反埃尔米特矩阵同时又是酉矩阵的集合, 后者即为矩阵方程 $X^2=-E_{2m}$ 的解. 特别由此可清楚看出, 可将格拉斯曼流形 $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$ 看成是 $\mathbb{C}^{2m}$ 中所有酉复结构的集合. 也清楚看出, 酉群 SU_{2m} 与线性子空间 su_{2m} 的交与满足 $X^2=-E_{2m}$ 的矩阵的集合相同. 引理得证. □

引理 3　每条在 SU_{2m} 中连接点 E_{2m} 与 $-E_{2m}$ 的非极小的测地线 γ 的指数不小于 $2m+2$.

证明　由测地线指数的定义出发, 我们应该计算沿测地线 γ 与点 E_{2m} 共轭的点数 (在从 E_{2m} 到 $-E_{2m}$ 的这一段上). 由对雅可比方程 (其解为沿测地线的雅可比场) 的显式方程我们得到了由线性变换 $K_X: su_{2m}\to su_{2m}$ 的正特征值定义的所有对偶点, 其中算子 $K_X(Y)=R(X,Y)X=\dfrac{1}{4}[[X,Y],X]$ 由黎曼曲率算子产生 (对于群的情形化为三重换位子, 参看 [1], 卷 I, §§30, 36). 如同前面所表明的, 可以假设矩阵已被对角化, 从而有形式

$$X=\begin{pmatrix} i\pi k_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & i\pi k_{2m}\end{pmatrix},\quad 其中\ k_i\geqslant k_{i+1}.$$

由换位子的显示公式, 我们得到: $[X,Y]=(i\pi(k_j-k_l)y_{jl})$, 即 $K_X(Y)=\left(\dfrac{\pi^2}{4}(k_j-k_l)y_{jl}\right)$. 直接计算表明, 在那些使点 $\gamma(t)$ 沿 γ 与点 E_{2m} 共轭的 t 值由下面的式子给出: $t=\dfrac{2}{k_j-k_l},\dfrac{4}{k_j-k_l},\dfrac{6}{k_j-k_l},\cdots$ (对任意数偶 l,j). 在区间 $(0,1)$ 上, 当 l,j 固定时的共轭点数等于 $\dfrac{k_j-k_l}{2}-1$. 假设 $k_j>k_l$, 那么我们得到测地线 γ 的指数公式

$$\mu=\sum_{k_j>k_l}(k_j-k_l-2).$$

从这个显式公式我们看出, 对于极小测地线而言, 其指数为 0. 现假设测地线不是极小的. 考虑两种情形: a) 在数 k_i 中至少有 $m+1$ 个数具有同一个符号; b) 在数 k_i 中正好有 m 个正数和 m 个负数, 但不是所有的都等于 ±1. 于是得到 $\mu\geqslant 2m+2$. 引理得证. □

回到酉周期定理的证明, 即稳定同伦群 $\pi_i(U)$ 以 2 为周期. 群 $\pi_0(U)=\pi_2(U)=\pi_4(U)=\cdots$ 平凡, 而群 $\pi_1(U)=\pi_3(U)=\pi_5(U)=\cdots$ 同构于群 $\mathbb{Z}$.

引理 4 考虑极小测地线集合 (同胚于复格拉斯曼流形 $G_{2m,n}^{\mathbb{C}}$) 在道路空间 $\Omega(SU_{2m},E_{2m},-E_{2m})$ 中的嵌入. 那么该嵌入诱导了在所有维数不超过 $2m$ 的同伦群间的同构. 因为成立等式 $\pi_i(\Omega X)=\pi_{i+1}(X)$, 故最终得到了 $\pi_i(G_{2m,m}^{\mathbb{C}})=\pi_{i+1}(SU_{2m})$.

证明 考虑在道路空间 $\Omega(SU_{2m},E_{2m},-E_{2m})$ 上的作用泛函; 其临界点 (在该点作用泛函达到极小值) 为极小测地线, 它在 SU_{2m} 中连接 E_{2m} 和 $-E_{2m}$; 于是这个泛函的极小点的集合同胚于 $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$. 同时, 如同上面所证, 此泛函的其他临界点 (即不同于极小测地线) 的指数不小于 $2m+2$. 应用到这个莫尔斯理论的泛函 (对于充满了非退化临界子流形的退化临界点的情形), 我们得知, 道路空间 $\Omega(SU_{2m},E_{2m},-E_{2m})$ (看作为无限胞腔复形) 由作用泛函的绝对极小流形通过附加维数不小于 $2m+2$ 的胞腔到该流形 (它同胚于 $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$) 上得到. 于是, 空间 $\Omega(SU_{2m},E_{2m},-E_{2m})$ 的同伦群在维数 $i\leqslant 2m$ 等于作用泛函的绝对极小流形的同伦群. 引理得证. □

引理 5 成立同构 $\pi_{i-1}(U_m)=\pi_i(G_{2m,m}^{\mathbb{C}}), i\leqslant 2m$.

证明 (参看 [1], 卷 II, §24.) 考虑标准的纤维丛 $U_{m+1}\to S^{2m+1}$ 纤维为 U_m; 由它的正合同伦序列立即得知, 当 $i\leqslant 2m$ 时 $\pi_{i-1}(U_m)=\pi_{i-1}(U_{m+1})$. 另一方面, 由纤维丛 $U_{2m}\to U_{2m}/U_m$ (纤维 U_m) 的正合同伦序列得到, 当 $i\leqslant 2m$ 时 $\pi_i(U_{2m}/U_m)=0$, 这等价于引理的论断. 证明结束. □

现在把所有这些命题集中一起, 我们最终得到酉周期性定理:

$$\pi_{i-1}(U_m)\ \underset{\cong}{\overset{\partial}{\longleftarrow}}\ \pi_i(G_{2m,m}^{\mathbb{C}})\ \overset{\cong}{\longrightarrow}\ \pi_i(\Omega)^*(SU_{2m},E_{2m},-E_{2m})$$
$$\cong\pi_{i+1}(SU_{2m})=\pi_{i+1}(U_{2m}).$$

我们来写出这个同构链的显式形式. 设 $f_{i-1}:S^{i-1}\to U_m$ 为连续映射, 它代表了同伦类 $[f]\in\pi_{i-1}(U_m)$. 由这个映射构造出映射 $f_{i+1}:S^{i+1}\to SU_{2m}$. 为此, 我们表示群 SU_2 为矩阵群 $\{p\}$, 其中 $p=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}, |\alpha|^2+|\beta|^2=1$, 并从群 SU_2 中分出一个子集, 即二维圆盘 $'D^2$, 它由下面的条件给出: $p\in{}'D^2, \beta\in\mathbb{R}, \beta\geqslant 0$, 然后把这个二维圆盘 $'D^2$ 嵌入到群 SU_{2m} 中, 这个嵌入公式为

$$j:p\to p\otimes E_m=\begin{pmatrix}\alpha E_m, & \beta E_m\\ -\beta E_m, & \overline{\alpha}E_m\end{pmatrix}.$$

另外, 我们在圆盘 $'D^2$ 上考虑光滑曲线 $'\gamma(\beta)=\{p(\alpha,\beta)|\alpha=i\tau,\tau\in\mathbb{R},\tau\geqslant 0\}$; 令 $\gamma(\beta)=j('\gamma(\beta))$. 格拉斯曼流形中的点映成了算子 $g:\mathbb{C}^{2m}\to\mathbb{C}^{2m}, g\in$

$SU_{2m}, g^2 = -E_{2m}$ 的对应于特征值 $\lambda = i$ 的不变平面. 于是对于点 $\gamma \in \gamma(\beta)$, 我们有: $\gamma^2 = -E_{2m}$, 即 $\gamma(\beta) \in G^{\mathbb{C}}_{2m,m} \subset SU_{2m}, 0 \leqslant \beta \leqslant 1$. 考虑在 $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$ 中下列形状的元素 g 的集合:

$$\begin{aligned} g &= g(\sigma, i\tau, \beta) \\ &= [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)] \cdot [p(i\tau, \beta) \oplus E_m] \cdot [E_m \oplus f_{i-1}(\sigma)], \end{aligned}$$

其中 $\sigma \in S^{i-1}, f_{i-1}(\sigma) \in U_m$. 当 $\beta = 1$, 我们得到球面 S^{i-1} 的映射

$$h : \sigma \to \begin{pmatrix} 0 & f_{i-1}(\sigma) \\ -f_{i-1}^{-1}(\sigma), & 0 \end{pmatrix},$$

而当 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ 时, 集合 $\{g(\sigma, i\tau, \beta)\}$ 表示为球面 S^i 的像, 其中 $\{g(\sigma, i\tau, \beta)\} \in G^{\mathbb{C}}_{2m,m}, \partial[S^i] = [h]$ (其中 $\partial : \pi_i(G^{\mathbb{C}}_{2m,m}) \to \pi_{i-1}(U_m)$).

定理 1 (福明柯, Фоменко) 设 $f_{i-1} : S^{i-1} \to U_m$ 为连续映射, 它代表了同伦类 $[f] \in \pi_{i-1}(U_m)$. 由周期性定理知, 群 $\pi_{i-1}(U_m)$ 与 $\pi_{i+1}(U_{2m})$ 同构. 这个同构有下面的显式表达: $f_{i-1} \to f_{i+1}$, 其中

$$\begin{aligned} &f_{i+1} : S^{i+1} \to U_{2m} \text{ 定义为 } f_{i+1} : S^{i+1} \to \{g(\sigma, \alpha, \beta)\} \subset SU_{2m}; \\ &g(\sigma, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\sigma) & \overline{\alpha} E_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

即对应关系 $f_{i-1} \to f_{i+1}$ 所关联的是同伦群 $\pi_{i-1}(U_m)$ 中元到同伦群 $\pi_{i+1}(U_{2m})$ 中的一个元, 从而给出了周期同构.

证明 考虑集合 $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$,

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)][p(\alpha, \beta) \oplus E_m][E_m \oplus f_{i-1}(\sigma)];$$

于是 $g(\sigma, \alpha, \beta)$ 可以表示为球面 S^{i+1} 在连续映射 $f_{i+1} : S^{i+1} \to \{g(\sigma, \alpha, \beta)\} \subset SU_{2m}$ 下的像. 因此, 如果 $f_{i-1}(\sigma) \in U_m$ 是同伦群 $\pi_{i-1}(U_m)$ 中某个元, 于是 $f_{i+1}S^{i+1} \subset SU_{2m}$, 并且由上面所描述的显式构造 (并考虑到经典的周期性同构) 立即得知对应关系 $f_{i-1} \to f_{i+1}$ 产生了酉周期同构. 显式表达的公式

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = f_{i+1}(S^{i+1}) = \begin{pmatrix} \alpha E_m, & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\sigma), & \overline{\alpha} E_m \end{pmatrix}$$

通过边缘映射 (参看上面关于它的显式表达) 与某个映射的组合得到, 其中的这个映射把由那些从点 E_{2m} 引向点 $-E_{2m}$ 的极小测地线束组成的 "球体" (即球面的映射) 带到由所有这个束的测地线的中点组成的球体; 而这个球体位于格拉斯曼流形之中. 定理得证. □

那么, 从几何的观点看, 周期性的同构构造起来相当简单.

第一步. 需要从群 U_m 中取出球体 f_{i-1}, 并利用对边缘算子 $\partial:\pi_i(G^{\mathbb{C}}_{2m,n})\to\pi_{i-1}(U_m)$ 的考察, 把这个球体化为嵌入在格拉斯曼流形中的球体 (见上面的显式表达式).

第二步. 需要取所得到格拉斯曼流形中的球体, 其中的格拉斯曼流形表示为群 SU_{2m} 与其李代数 su_{2m} 的交 (在它们作为嵌入到所有 $2m\times 2m$ 阶复矩阵的线性空间中的子集), 利用这个交集正好与所有极小测地线的中点的集合相同这件事实 (其中的测地线是群 SU_{2m} 中从点 E_{2m} 到点 $-E_{2m}$ 的), 并考虑其中点位于格拉斯曼流形中的球体所有测地线, 则得到了也在群 SU_{2m} 中的球体. 这个球体是原来球体 f_{i-1} 在周期性同构下的像. 上面所证明的定理给出了这个同构的显式表达式.

如果 $m=2$, 则对最初的映射 $f_3:S^3\to SU_2$ 可以取为恒同映射 $f_3(\sigma)=\begin{pmatrix} x & y\\ -\overline{y} & \overline{x}\end{pmatrix}, |x|^2+|y|^2=1$; 于是 $[f_3]=1\in\pi_3(SU_2)$. 现转向 $m=2^2,2^3,2^4,\cdots$, 我们得到映射 $f_{2k+1}:S^{2k+1}\to SU_{2^k}$, 其中 $[f_{2k+1}]=1\in\pi_{2k+1}(SU_{2^k}), k\geqslant 1$. 最后, 我们注意到, 映射 f_{2k+1} 等同于一种熟知的 "对偶" 映射 α_{2k+1}, 它出现在克利福德 (Clifford) 代数理论和正交群的旋量表示中, 但须在这个映射定义中将系数域 $\mathbb{R}$ 换成作复数域 $\mathbb{C}$.

我们来进行这个比较, 因为这也给出了对酉周期性同构的一个显示表达式, 并且有更简明的几何刻画. 以下面的方式构造映射 α_{2k+1}. 设 $f:S^{n-1}\to GL(N;\mathbb{C}), g:S^{m-1}\to GL(M;\mathbb{C})$ 为两个连续映射. 因为 $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n, S^{m-1}\subset\mathbb{R}^m$, 故映射 f 和 g 可以分别延拓 (由齐性) 到欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$. 我们定义映射 $\mathbb{R}^{n+m}\backslash\{0\}\to GL(2MN,\mathbb{C})$ 为

$$f*g=w(x,y)=\begin{pmatrix} f(x)\otimes E_M & -E_N\otimes g^*(y)\\ E_N\otimes g(y) & f^*(x)\otimes E_M\end{pmatrix},$$

其中 $f^*=\overline{f}^{\mathrm{T}}, g^*=\overline{g}^{\mathrm{T}}; (x,y)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, (x,y)\neq(0,0)$. 因为 $\omega=f*g$ 定义在 $\mathbb{R}^{n+m}\backslash\{0\}$ 上, 故有映射 $S^{n+m-1}\to GL(2MN;\mathbb{C})$. 如果 $\alpha:S^1\to GL(1,\mathbb{C}), \alpha(z)=z, |z|=1$, 故 $'\alpha_{2k+1}=\alpha*\alpha*\cdots*\alpha(2k+1$ 次). 如果取对应于映射 $'\alpha_{2k+1}$ 的映射 $S^{2k+1}\to SU_{2^k}$ 作为 α_{2k+1}, 则显然得到恒等式 $\alpha_{2k+1}\equiv f_{2k+1}$.

II. 以高维变分问题的观点研讨酉周期性

前面所描述的周期性定理根据的是一维的泛函理论 (即定义在酉群中轨线上的作用泛函). 我们发现, 周期性同构的最自然的方式存在于对高维 (在我们的情形为二维) 变分问题的考虑之中.

在经典的处理中, 酉周期性同构被分解为两个同构的复合, 其中每一个提高了同伦群一个维数. 要求将维数提升两个单位是完成这两个步骤的结果 (见前

一小节中的阐述), 完全对应了经典的证明方法, 在那里应用了一维的作用泛函和长度泛函; 它们定义在一维圆盘 D^1 (即线段) 的映射构成的空间上. 我们来更仔细地考察这个过程. 设固定了一个一维圆盘 $D^1; \partial D^1 = S^0$ (零维球); 于是 $\Pi_1 = \Omega^*(SU_{2m}, E_{2m}, -E_{2m})$ 为圆盘 D^1 到群 SU_{2m} 里的连续映射 f 的空间, 其中的 f 满足 $f|_{S^0} = i_0|_{S^0}, i_0S^0 = (E_{2m}, -E_{2m})$, 即该圆盘的边缘总是映到同一对固定点. 在空间 $\Pi_1' = \Omega(SU_{2m}, E_{2m}, -E_{2m})$ 上作用泛函 E 定义为

$$E_0^1(\omega) = \int_0^1 \left|\frac{d\omega}{dt}\right|^2 dt,$$

其中 $\omega(0) = E_{2m}, \omega(1) = -E_{2m}$. 这个泛函自然地与长度泛函

$$L_0^1(\omega) = \int_0^1 \left|\frac{d\omega}{dt}\right| dt$$

有关. 像在 [**1**], 卷 I 中指出的, 泛函 L 的临界点 (极值曲线) 的研究被化成对泛函 E 的极值曲线和性质的研究. 作用泛函 E (从而长度泛函 L) 达到了绝对极小的那些点 (轨线) 的集合是空间 Π_1' 的一个子空间, 它同胚于格拉斯曼流形 $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$, 因而 (如同由一维莫尔斯理论所得到的那样) 空间 Π_1 的 $2m$ 维骨架同伦等价于空间 $G^{\mathbb{C}}_{2m,m}$ 的 $2m$ 维骨架. 换句话说, 可以假定酉周期同构的解析部分包含于同构

$$\pi_i(G^{\mathbb{C}}_{2m,m}) = \pi_i(\Pi_1') = \pi_i(\Pi_1) = \pi_{i+1}(SU_{2m}),$$

这是因为后续的一步 $\pi_i(G^{\mathbb{C}}_{2m,m}) = \pi_{i-1}(U_m)$ 纯粹是一种同伦事实的推论, 与泛函数 E 没有任何关系了.

上面描述的周期性同构的几何机理提示了不用两步而只需一步就能得出这个同构的可能性; 如果不是利用一维变分而是二维的, 便能做到, 就是说要选取适当的二维泛函. 事实上, 这种可能性是存在的; 特别它还更加简化了周期同构的几何刻画. 我们转向高维变分问题的研究.

考虑在特殊选取的映射空间上的二维泛函, 我们将因此得到周期性同构. 在群 SU_{2m} 中考虑嵌入在其中的圆

$$S_0^1 = \begin{pmatrix} \alpha E_m & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} E_m \end{pmatrix}, \quad |\alpha| = 1,$$

它是个单参数子群, 我们将其固定. 在这里我们要按一维情形的类比进行处理, 那时在群 SU_{2m} 中被固定的是个零维球面 $S^0 = \{E_{2m}, -E_{2m}\}$. 设 D^2 为边界 S^1 的二维圆盘, 其中有标准的欧氏度量; 固定映射 $j_0 : S^1 \to SU_{2m}$, 它将圆 S^1 等距地映到圆 S_0^1.

以 Π_2 代表所有连续映射 $f: D^2 \to SU_{2m}$ 的拓扑空间, 其中 $f|_{S^1} = j_0$. 空间 Π_2 具有胞腔复形的同伦型. 考虑子空间 $\Pi_2' \subset \Pi_2$, 它由所有泛函空间 $H_1^2(D^2)$ 中的所有映射 f 构成, 这个空间 $H_1^2(D^2)$ 由下面定义 (这样做是为了使问题提得精确和恰当) 给出.

设 G 为欧氏空间 $\mathbb{R}^\nu(x^1, \cdots, x^\nu)$ 中的一个区域. 我们说, 函数 $u: G \to \mathbb{R}$ 属于函数类 $H_m^p(G)$ 当且仅当: 1) $u \in L_p(G)$, 即 p 阶可积; 2) 存在 "广义导数" $D^\alpha u$, 即存在那样的函数 $r_\alpha \in L_p(G), \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu), 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, 使得对任意无限光滑具紧支集的函数 g 成立恒等式

$$\int_G g(x) r_\alpha(x) dx = \int_G |D^\alpha g(x)| u(x) dx.$$

这里的 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu; D^\alpha g = \dfrac{\partial^{|\alpha|} g}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x^\nu)^{\alpha_\nu}}$. 如果 $m = 1$ 则 $|\alpha| = 1$.

如果 $f: D^2 \to SU_{2m}$, 则 $f \in H_1^2(D^2)$ 当且仅当这个映射的生成坐标函数属于 $H_1^2(D^2)$. 我们把在一维情形中映射 f 为逐段光滑的要求换成了映射 f 属于类 $H_1^2(D^2)$. (对一维莫尔斯理论来说, 这样做是必须的).

在空间 Π_2' 上, 我们定义狄利克雷泛函 $D: \Pi_2' \to \mathbb{R}$, 对每个映射 $f \in \Pi_2'$ 相配一个在映射 f 上的狄利克雷 (Dirichlet) 积分的值 $D[f]$ (见后面的定义). 这个狄利克雷泛函是一维作用泛函的二维类比, 同时作为二维面积的泛函也类比于一维的长度泛函 (参看 [1], 卷 I, §32). 让我们来回忆狄利克雷 (Dirichlet) 泛函的定义. 称函数 $r_\alpha(x), \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu)$ 为 u 的导函数, 以 $D^\alpha(u)$ 或 $u_{,\alpha}$ 表示; 如果 $\alpha = 0$, 则 $u_{,\alpha} = u$. 现在设 M 和 V 为黎曼流形, 其度量张量分别是 $g_{ij}(x), x \in M; \widehat{g}_{\alpha\beta}(v), v \in V$. 对每个映射 $f: V \to M, f \in H_1^2[V, M]$, 联系了一个混合型的张量: 例如 $x_\alpha^i = x_{,\alpha}^\nu$, 其中 x^i 为点 $x = f(v) \in M$ 的局部坐标, 而微分则是上面指出的意思. 以 ∇_α 表示对混合型张量的总共变导数. 我们定义两个张量 x_α^i, y_β^j 的内积为 $(x_\alpha^i, y_\beta^j) = \widehat{g}_{\alpha\beta} g_{ij} x_\alpha^i y_\beta^j$. 现设 $f \in H_1^n[V, M]$; 令

$$D[f] = \int_V \left[\frac{1}{n}(x_\alpha^i, x_\beta^j)\right]^{\frac{n}{2}} dv,$$

其中 dv 为在黎曼流形 V 上的黎曼体积元, 而 $n = \dim V$. 如果对定义在 $f(V)$ 上的任意 H_1^n 类的向量场 $\eta(f)$ 有 $\delta D[f; \eta] = 0$, 则称映射 $f \in H_1^n[V, M]$ 为调和的. 对泛函 $D[f]$ 的相应的欧拉方程有形状: $\nabla^\alpha \nabla_\alpha x^i = 0$. 可用直接计算验证它.

在我们的情形, 我们选取二维圆盘 D^2 作为流形 V; 于是 $\widehat{g}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, 从而狄利克雷泛函 (二维的作用泛函的类比)$D[f]$ 有形式

$$D[f] = \frac{1}{2} \int_V [(x_1^i, x_1^j) + (x_2^i, x_2^j)] dv = \frac{1}{2} \int_V g_{ij}(x_1^i x_1^j + x_2^i x_2^j) dv,$$

其中 g_{ij} 为群 SU_{2m} 的度量.

这时该群在空间 S^{N-1} 中实现, 而度量 g_{ij} 为欧氏度量的限制. 泛函 D 的一阶变差 δD 为 $\delta D[f;\eta]=\int_V (x^i_\alpha, \nabla_\beta\eta^j)dv$. 如果二维圆盘 D^2 以欧氏坐标 u,v 参数化, 则得到了

$$D[f]=\frac{1}{2}\int_V[(x_u,x_u)+(x_v,x_v)]dudv, x=(x^1,\cdots,x^p), p=\dim M;$$

$$\delta D[f,\eta]=\int_V\left[\left(\frac{D\eta}{du},x_u\right)+\left(\frac{D\eta}{dv},x_v\right)\right]dudv, \eta\in H^2_1(D^2).$$

在映射空间 Π'_2 中再考虑一个泛函 $A[f]$, 它对每个映射 $f\in\Pi'_2$ 对应下面的积分值:

$$\int_V\sqrt{\det\Omega}dudv,\quad \text{其中}\,\Omega=\begin{pmatrix}(x_u,x_u) & (x_u,x_v)\\ (x_u,x_v) & (x_v,x_v)\end{pmatrix}.$$

即泛函 $A[f]$ 是二维面积泛函. 熟知的结果表明 $A[f]\leqslant D[f]$ (参看 [1], 卷 I, §37), 同时等号成立当且仅当映射 f 为广义共形. 例如, 在三维欧氏空间中的二维极小曲面情形, 这意味着曲面的极小径向向量在共形坐标下总是调和的 (即在其诱导黎曼度量下具有对角线形状). 我们也留意到, 在这里仍看出与一维情形的类同 (参看前面具固定端点的道路空间), 这就是: 作用泛函 E 和长度泛函 L 以类似的关系相关: $L^2(\omega)\leqslant E(\omega)$, 同时等式成立的充要条件是映射 ω 给出了极小测地线, 它从点 $\omega(0)$ 到点 $\omega(1)$ (相对于自然参数).

完全像作用泛函 E 一样, 二维的狄利克雷泛函 D 允许舍去所有那些映射 f, 它们与调和映射 f_0 只差一个在 D^2 中一个连续的参数变换, 这并不改变面积泛函的值, 但一般说来, 会改变狄利克雷泛函的值.

我们留意到 (我们在以后会需要它), 成立同构 $\beta_2:\pi_s(\Pi_2)\cong\pi_{s+2}(SU_{2m})$, 以及空间 Π_2 同伦等价于具定点的所有连续映射 $S^2\to SU_{2m}$ 的空间 $\widetilde{\Pi}_2$. 第一个断言是二重闭道纤维丛的正合序列的显然推论.

定理 2 (福明柯) 考虑群 SU_{2m} 和泛函空间 Π_2,Π'_2. 在空间 Π'_2 中考虑子集 W, 它由所有点 (即连续映射) f 组成, 在这些 f 上狄利克雷泛函 $D[f]$ 达到绝对极小. 于是满足下列论断:

a) 集合 W 同胚 (作为拓扑空间) 于群 U_m;

b) 嵌入 $i:W\to\Pi'_2\to\Pi_2$ 诱导了同伦群的同构: 当 $s\leqslant 2m$ 时 $i_*:\pi_s(U_m)\to\pi_s(\Pi_2)$. 故而空间 Π_2 的 $(2m)$ 维骨架同伦等价于群 U_m 的 $(2m)$ 维骨架, 并且复合同态

$$\beta_2\circ i_*:\pi_s(U_m)\xrightarrow{\cong}\pi_{s+2}(SU_{2m})$$

当 $s\leqslant 2m$ 时是个酉周期同构.

注 因此，利用二维狄利克雷泛函并考察其绝对极小的集合可以一步就得到酉周期性同构 (立即升高了同伦群的维数两个单位)，不像在用一维作用泛函和长度泛函时要分 "两步走".

证明 定理的证明以下面一系列引理的形式进行. 首先考虑在群 SU_{2m} 中的二维球面，它的表达式为

$$S_0^2 = \begin{pmatrix} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \overline{\alpha} E_m \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

其中的一个半球面，即由不等式 $\beta \geqslant 0$ 给出的那个，它等同于二维圆盘 D_0^2，其按上面的方式嵌入在群 SU_{2m} 中. 球面 S_0^2 的赤道 $\{\beta = 0\}$ 为圆 S_0^1. 因为球面的嵌入 $S_0^2 \to SU_{2m}$ 可延拓为嵌入 $SU_2 \to SU_{2m}$，故球面 S_0^2 是群 SU_{2m} 的一个全测地子流形，从而更是个极小子流形. 我们记得，所谓子流形为全测地的是说，如果任意一条测地线在一点切于这个子流形则它就整个在此子流形上. 于是由黎曼曲率张量限制在全测地子流形上的显式表达式知道，任意全测地子流形为局部极小. 在李群中，在全测地子流形上的黎曼曲率张量是承载群分解为直和时，它的黎曼张量的一个直和因子.

于是，圆盘 D_0^2 也是群 SU_{2m} 的全测地子流形. 考虑全测地子流形 $D^2(x) \subset SU_m$ 的集合 W'，它具有形式 $D^2(x) = xD_0^2x^{-1}$ 形状，其中 $x \in SU_{2m}$ 使 $xsx^{-1} \equiv s$ 对 $s \in S_0^1$ 为任意点时成立.

引理 6 集合 W' 同胚于空间 U_m.

证明 设 $D^2(x) \in W'$；于是对任意 $s \in S_0^1$ 有 $xs = sx$. 因为 $S_0^1 = \{\alpha E_m + \overline{\alpha} E_m, |\alpha| = 1\}$，故由此知 $x = A \oplus D$，其中 $A, D \in U_m$，即 $x = (E_m \oplus DA^{-1})(A \oplus A) = x_1(A \oplus A), x_1 = (E_m \oplus DA^{-1})$. 因为 $(A \oplus A)d = d(A \oplus A), d \in D_0^2, A \in U_m$ 为任意元，故

$$D^2(x) = D^2(x_1) = \begin{pmatrix} \alpha E_m & \beta C \\ -\beta C^{-1} & \overline{\alpha} E_m \end{pmatrix}, \quad C = DA^{-1}.$$

由于 $\beta \geqslant 0$，故矩阵 C 由此条件唯一确定. 因此我们可以把每个圆盘 $D^2(x)$ 相配一个元 $C \in U_m$，记为 $C = C[D^2(x)]$. 设 $C[D^2(x)] = C[D^2(x')]$；显然有 $x'x^{-1} \in \{A \oplus A\}$，从而圆盘 $D^2(x)$ 和 $D^2(x')$ 重合. 反之，如果 $C \in U_m$，则 $C = C[D^2(x)]$，其中 $x = E_m \oplus C$；这就是说，建立了一个对应关系 $D^2(x) \to C[D^2(x)]$，这就是我们所要的在 W' 与 U_m 之间的同胚. 引理得证. □

现在我们来构造嵌入 $U_m \to \Pi_2'$. 设 $g \in U_m$；于是由此元素唯一地构造出一

个二维圆盘

$$D^2(E_m \oplus g) = \begin{pmatrix} \alpha E_m & \beta g \\ -\beta g^{-1} & \overline{\alpha} E_m \end{pmatrix},$$

那么, 如果 $g_1 \neq g_2$, 则 $D^2(E_m \oplus g_1) \bigcap D^2(E_m \oplus g_2) = S_0^1$. 设 $i_0 : D^2 \to D_0^2$ 为固定的映射. 令 $i(g)\xi = (E_m \oplus g)i_0(\xi)(E_m \oplus g^{-1})$, 其中 $\xi \in D^2$. 显然, $i : g \to i(g)$ 是我们想要的嵌入: $U_m \to \Pi_2'$. 由上面所证的引理得出, 映射 $i(U_m) \subset \Pi_2'$ 的集合与映射 $Ad_x \circ i_0$ 形状的集合相同, 其中元素 x 历遍整个群 $G = \{A \oplus A\} \subset U_{2m}, G \cong U_m$, 即集合 $i(U_m)$ 是点 $i_0 \in \Pi_2'$ 在映射集合 Π_2 上的群 G 的共轭作用下的轨道.

引理 7 同态 $\beta_2 \circ i : \pi_s(U_m) \to \pi_{s+2}(SU_{2m})$ 与酉周期性同构相同.

证明 设 $f : S^s \to U_m, f \in [f] \in \pi_s(U_m), \sigma \in S^s$; 于是

$$[(\beta_2) \circ i_*](f)(\sigma) = D^2[E_m \oplus f(\sigma)] = \begin{pmatrix} \alpha E_m, & \beta f(\sigma) \\ -\beta f^{-1}(\sigma), & \overline{\alpha} E_m \end{pmatrix}.$$

由前面一节和一维莫尔斯理论当即得到: 同态 $\beta_2 \circ i_*$ 在 $s \leqslant 2m$ 时与酉周期性同构相同. 由于 β_2 在任意维数都是个同构, 从而知道 $i_* : \pi_s(U_m) \to \pi_s(\Pi_2)$ 当 $s \leqslant 2m$ 时也是个同构, 所以 Π_2 的 $2m$ 维骨架同伦等价于 $i(U_m)$ 的 $2m$ 维骨架. 引理得证. □

因此, 嵌入 $i : U_m \to \Pi_2$ 满足了所有必须的要求. 剩下来要证明的是满足等式 $i(U_m) = W$.

我们考虑欧氏空间 $\mathbb{R}^{8m^2}$, 它等同于所有 $2m \times 2m$ 复矩阵的空间 $\mathbb{C}^{4m^2}$, 其上赋予了双线性形式 $\varphi(A, B) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB^*), B^* = \bar{B}^{\mathrm{T}}$. 于是群 SU_m 等距地, 作为光滑子流形嵌入到半径为 $\sqrt{2m}$ 的球面 S^{8m^2-1} 中; 并且在此光滑子流形上诱导出了一个特殊的黎曼度量, 它对群 SU_{2m} 上的右和左的平移不变. 这个度量显然同于基灵度量. 因此在群 SU_{2m} 中的许多度量关系以所嵌入的球面 S^{8m^2-1} 的观点来观察是有益的. 我们首先从群在球面中这种等距嵌入的存在性上得出一个推论. 例如, 在群 SU_{2m} 中不存在二维圆盘 D_0^2 的保持其边缘 $S_0^1 = \partial D_0^2$ 不动的无穷小变差 (扰动), 使得扰动的圆盘 $\widetilde{D}_0^2$ 是群 SU_{2m} 中的极小圆盘但不是全测地的圆盘. 事实上, 假设存在这样的变差. 我们注意到, 圆 $S_0^1 \subset SU_{2m} \subset S^{8m^2-1}$ 是在球面 S^{8m^2-1} 中的一个大圆弧, 而圆盘 D_0^2 是球面 S^{8m^2-1} 的中心平面的截影, 即这个三维平面通过了 $\mathbb{R}^{8m^2}$ 的坐标原点. 因为圆盘 $\widetilde{D}_0^2$ 不是 (依照假定) 在群 SU_{2m} 中的全测地子流形, 故它在球面 S^{8m^2-1} 中也不是全测地的, 这就是说, 它不能由 $\widetilde{D}_0^2$ 通过绕圆 S_0^1 的旋转得到. 由此得知, 它的面积在线性近似下严格地大于 D_0^2 的面积, 即 $\delta A > 0$. 故而圆盘 $\widetilde{D}_0^2$ 不是极小圆盘, 与假定相矛盾. 因此, 任意圆盘 $D^2(x) \in W'$ 的任意变差或者保持了 $D^2(x)$ 的全测地的性质 (从而

这个变差化为绕其边缘圆 S_0^1 的圆盘的旋转, 在这里使用了承载群 SU_{2m} 的某个内自同构给出的旋转), 或者破坏了它的局部极小性 (至少在一个内点上).

引理 8 *存在嵌入*: $i(U_m) \subset W$.

证明 因为每个映射 $f \in i(U_m)$ 的形状为 $f = Ad_x i_0, x \in G$, 故只要验证点 i_0 是狄利克雷泛函 D 的绝对极小点即可. 因为 $SU_{2m} \subset S^{8m^2-1}$, 并且圆盘 D_0^2 是球面 S^{8m^2-1} 的中心平面截影, 故映射 i_0 是面积泛函 A 的绝对极小点. 又因为任意极小向量是调和的 (在相应的局部坐标下), 故这个映射 i_0 是狄利克雷泛函 D 的临界点 (我们也注意到, 从映射 i_0 的显式构造可得出 i_0 的广义调和性; 见前面的内容). 因为总有不等式 $A[f] \leqslant D[f]$, 故清楚看出映射 i_0 是狄利克雷泛函 D 的绝对极小点. 引理得证. □

引理 9 有等式 $i(U_m) = W$, 其中 W 为狄利克雷泛函 D 的绝对极小点的集合.

证明 设 $f : D^2 \to SU_{2m}, f|_{S^1} = j_0$ 为狄利克雷泛函 D 的绝对极小点. 在前面的引理中已证明, 泛函 D 在绝对极小点的值等于 $D[i_0]$, 从而这个值等于 $A[i_0]$, 因为 $A[f] \leqslant D[f] = D[i_0] = A[i_0]$, 故 $A[f] \leqslant A[i_0]$, 但因为这个关系可在球面 S^{8m^2-1} 的标准度量下考虑, 故显然有 $A[f] = A[i_0]$, 从而 $f(D^2) \subset S^{8m^2-1}$ 是个中心平面截影; 此外, 映射 f 是调和的. 延拓全测地的圆盘 $f(D^2)$ 到球面 $\widetilde{S}^2$, 它是在球面 S^{8m^2-1} 中的全测地球面 (进而是群 SU_{2m} 中的全测地子流形). 我们在群 SU_{2m} 中得到了两个全测地球面 S_0^2 和 $\widetilde{S}^2$, 同时 $S_0^2 \cap \widetilde{S}^2 \supset S_0^1 \ni E_{2m}$. 包含这些球面 S_0^2 和 $\widetilde{S}^2$ 的极小子群是同构于群 SU_2 的子群 G_1 和 G_2. 两个嵌入 $\alpha_1 : G_1 \to SU_{2m}, \alpha_2 : G_2 \to SU_{2m}$ 定义了群 SU_2 在群 SU_{2m} 的两个忠实表示. 因为 SU_2 的秩等于 1, 故可假设圆 S_0^1 是极大环 $T^1 = S^1 \subset SU_2$ 的像, 其中 $S_0^1 \subset T^{2m-1}$, 而 T^{2m-1} 是群 SU_{2m} 的极大环面. 因为这两个表示 α_1 和 α_2 在环 T^1 (T^1 为在群 SU_2 中的极大子群; 在现在的情形中, 这个环面是一维的, 并同胚于圆) 相同, 于是它们等价, 就是说, 存在元素 $x \in SU_{2m}$ 使其满足等式 $\alpha_1 = Ad_x \circ \alpha_2$. 又, 嵌入在群 G_1 中的两个球面 S_0^2 和 $x\widetilde{S}^2x^{-1}$ 还可以结合上一个内自同构 Ad_{x_1}; 于是在球面 S_0^2 中我们得到了两条测地线: S_0^1 和 $x_1 x S_0^1 x^{-1} x_1^{-1}$. 那么, 存在元素 $x_2 \in G_1$, 使得 $S_0^1 \equiv x_2 x_1 x S_0^1 x^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}$. 所以自同态 Ad_y 把映射 f 转换成了映射 i_0, 其中 $y = x_2 x_1 x$, 同时保持了 S_0^1 不动, 即 $f \in i(U_m)$. 引理证完. □

那么, 定理的证明就完全结束. □

从上面我们注意到, 集合 W 中的点不仅是对两个泛函 A 和 D 的极小点, 而且也是 "全测地" 点 (即全测地映射). 这种情形在一维时也是如此, 不过在那里, 任意轨线的极小性自动地蕴含了它的测地性; 在二维的情形, 完全不能从二

维圆盘的极小性得出在它的承载群中的全测地性. 另外, 集合 W' 中的圆盘是边界为 S_0^1 的唯一的全测地圆盘 D^2; 换句话说, 如果映射 $f \in \Pi_2'$ 为泛函 D 的临界点, 又如果圆盘 $f(D^2)$ 为全测地的, 则 $f \in W$.

III. 以高维变分的观点研讨正交周期性

类似于上面所证的酉周期性定理, 对于正交群也成立周期性定理 (并相应地称为博特的正交周期性定理).

定理 3 成立同构 $\pi_i(O) \cong \pi_{i+8}(O)$, 其中 O 为稳定正交群: $O = \lim\limits_{n\to\infty} O_n$, $O_n \subset O_{n+1}$ 为标准嵌入. 除此之外, 正交群的稳定同伦群有下面形状:

$$\pi_0 = \mathbb{Z}_2, \pi_1 = \mathbb{Z}_2, \pi_2 = 0, \pi_3 = \mathbb{Z}, \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = 0,$$
$$\pi_7 = \mathbb{Z}, \pi_i = \pi_{i+8}.$$

证明 我们只证明这个结论的第一部分, 并一开始就应用高维变分的工具. 关键之处在于标准地利用一维莫尔斯理论去证明正交周期性定理要由 8 个步骤构成 (类似于在酉周期性定理的标准证明中由两步组成), 而与此同时, 如果应用定义在 8 维圆盘 (代替酉周期性的二维圆盘) 的映射空间上的狄利克雷泛函, 就让我们立即, 就是说一步, 便得到了同构: $\pi_i(O) = \pi_{i+8}(O)$ (但有点不太严谨).

考虑 $p \times p$ 维实矩阵的欧氏空间 $\mathbb{R}^{p^2}$; 其中的欧氏内积写作 $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{T}})$ 的形式. 于是群 SO_p 等距地嵌入在标准的球面 S^{p^2-1} 中, 其中球面的半径为 $\sqrt{p}$ (球心在点 0), 是该球面的一个光滑子流形, 而欧氏度量 $\varphi(A, B)$ 在其上诱导了一个双边不变的黎曼度量, 度量的形式等同基灵形式. 群 SO_p 的李代数 so_p 作为满足 $X^{\mathrm{T}} = -X$ 的矩阵包含在空间 $\mathbb{R}^{p^2}$ 中, 并且交集 $so_p \bigcap SO_p$ 在 p 为偶数时是紧的对称空间 $SO_p/U_{(p/2)}$. 以 $\Omega_1(p)$ 记交 $so_p \bigcap SO_p$; 于是显然地, 流形 $\Omega_1(p)$ 正好由那些满足 $g^2 = -E$ 的元 $g \in SO_p$ 组成, 就是说, $\Omega_1(p)$ 与 $\mathbb{R}^p$ 中的复结构的集合相同. 现在令 $p = 16r$; 于是 SO_{16r} 有 8 个反交换的 "复结构" 或算子, 我们把它们记作 $J_1, J_2, \cdots, J_8; J_s^2 = -E, J_sJ_k + J_kJ_s = 0, k \neq 8$. 所有的向量 $J_s(1 \leqslant s \leqslant 8)$ 都在平面 so_{16r} 中, 并且由于反交换条件知, 它们全部两两正交. 除此之外, 每个向量 J_r 还与向量 $E \in SO_{16r}$ 正交, 故而球面 $S_0^8 = \{x \in SO_{16r} | x = a^0E + a^1J_1 + \cdots + a^8J_8; (a^0)^2 + \cdots + (a^8)^2 = 1\}$ 为球面 $S^q(q = 256r^2 - 1)$ 的通过坐标原点的平面截影, 从而在球面 S^q 和在群 $SO_{16r} \subset S^q$ 中为全测地的. 显然, 有等式 $S_0^8 \bigcap so_{16r} = S_0^8 \bigcap \Omega_1(16r) = \overline{S}_0^7$, 这里的 $\overline{S}_0^7$ 是全测地的赤道, 它由方程 $a^0 = 0$ 给出. 我们在群 SO_{16r} 中固定一个全测地球面 $S_0^7 = \{x | x = a^0E + a^1J_1 + \cdots + a^7J_7, (a^0)^2 + \cdots + (a^7)^2 = 1\}$; 球面 S_0^7 是全测地 8 维圆盘 $D_0^8 \subset S_0^8$ 的边缘, 其中 $D_0^8 = \{x \in S_0^8; a_0^8 \geqslant 0\}$. 设 D^8 为在欧氏度量下的标准的 8 维圆盘, $S^7 = \partial D^8, i''$ 为 D^8 到半球面的标准映射, 在边缘 $\partial D^8 = S^7$ 上为恒同, i' 为半球面 $i''(D^8)$ 在群 SO_{16r} 中一个

唯一的等距嵌入, 使得在球面 $i''S^7$ 上与固定的那个等度嵌入 $j_0: S^7 \to S_0^7$ 相等. 令 $i_0 = i' \circ i'': D^8 \to SO_{16r}$. 考虑所有连续映射 $f: D^8 \to SO_{16r}$ 的空间 Π_8, 其中的 f 满足 $f|_{S^7} = j_0$. 设 $\Pi_8' \subset \Pi^8$ 为由所有属于类 $H_1^8(D^8)$ 的映射 $f: D^8 \to SO_{16r}$ 的子空间. 在空间 Π_8' 上, 我们考虑两个泛函 $A[f]$: 面积泛函, 即 $A[f] = \int_{D^8} \sqrt{\det \Omega} dv$ 和狄利克雷泛函

$$D[f] = \int_{D^8} \left[\frac{1}{8}(x_\alpha^i, x_\beta^j)\right]^4 dv = \int_{D^8} \left[\frac{1}{8}\sum_{\alpha=1}^{8} g_{ij} x_\alpha^i x_\alpha^j\right]^4 dv.$$

于是对任意 $f \in \Pi_8'$ 有 $A[f] \leqslant D[f]$. □

以 β_8 表示这个标准的同伦群的同构: $\pi_s(\Pi_8) \cong \pi_{s+8}(SO_{16r})$.

定理 4 (福明柯) 考虑群 SO_{16r} 和从 8 维圆盘到该正交群的映射的泛函空间 Π_8 和 Π_8'. 在空间 Π_8' 中我们考虑子集 W, 它由所有那些点 (映射)f 组成使得狄利克雷泛函 $D[f]$ 在其上达到绝对极小值. 于是成立:

a) 集合 W 同胚于正交群 O_r;

b) 嵌入 $i: W \to \Pi_8' \to \Pi_8$ 当 $s \leqslant r-2$ 时诱导出同伦群的同构 $i_*: \pi_s(O_r) \to \pi_s(\Pi_8)$; 所以空间 Π_8 的 $(r-2)$ 维骨架同伦等价于群 O_r 的 $(r-2)$ 维骨架, 从而当 $s \leqslant r-2$ 时, 复合映射 $\beta_8 \circ i_*: \pi_s(O_r) \xrightarrow{\approx} \pi_{s+8}(SO_{16r})$ 为正交周期性同构.

证明 因为群 $\pi_2(U_{2m})$ 平凡, 故空间 Π_2 连通. 又因为 $\pi_8(SO_{16r}) = \mathbb{Z}_2$, 故空间 Π_8 不连通, 并由两个连通分支组成; 由下面的证明我们将看到, 集合 W 也是由两个分支组成, 并且空间 Π_8 的每个分支正好包含了集合 W 的一个分支, 并且当 $r \to \infty$ 恰好收缩到这个连通分支.

现在考虑群 SO_{16r} 的子集 Ω_8, 它是由所有那些与复结构 $J_1, J_2, \cdots, J_7$ (参看前面对它们的描述) 反交换的复结构 J 组成, 也就是说与由方程 $a^0 = 0$ 给出标准 6 维球面 $S_0^6 \subset S_0^7$ 的每个点反交换. 例如, 显然 $J_8 \in \Omega_8$ 是那样的元. 直接的代数计算表明空间 Ω_8 由两个连通分支组成, 另外它还同构于 O_r. 还有, 空间 Ω_8 包含了垂直于所有向量 $E, J_1, \cdots, J_8$ 的平面中的闭道. 可清楚看出, $S_0^8 \bigcap \Omega_8 = \{J_8, -J_8\}$, 从而 $D_0^8 \bigcap \Omega_8 = J_8$ 是一个点.

对应于每个点 $x \in \Omega_8$, 我们给出一个全测地球面 $S^8(x)$, 而它以标准的球面 S_0^7 为赤道. 如果 $x \in \Omega_8$, 则向量 x 垂直于向量 $E, J_1, \cdots, J_7(xJ_s = -J_s x, 1 \leqslant s \leqslant 7$, 而向量 E 垂直于所有的复结构). 故张在基向量 $\{E, J_1, \cdots, J_7, x\}$ 上的球面是个球面 S^q 的中心平面截影, 从而是群 SO_{16r} 中的全测地子流形. 在球面 $S^8(x)$ 中考虑圆盘

$$D^8(x) = \{y \in S^8(x); y = y^0 E + \cdots + y^7 J_7 + y_x^8, y^8 \geqslant 0\}.$$

于是每个 $x \in \Omega_8$ 唯一地对应了全测地圆盘 $D^8(x)$, 使得 $\partial D^8(x) = S_0^7$, 并且如果 $x_1 \neq x_2$, 则 $D^8(x_1) \bigcap D^8(x_2) = S_0^7$. 完全像在酉周期性的情形那样, 可以定义嵌入 $i : O_r \xrightarrow{\approx} \Omega_8 \to \Pi_8' \to \Pi_8$; 这是因为对每个圆盘 $D^8(x), x \in \Omega_8$, 存在唯一的等距映射 $\omega(x) \circ i'' : D^8 \to D^8(x), \omega(x) \circ i''|_{S^7} = j_0$; 于是 $i(x) = \omega(x) \circ i''$.

引理 10 嵌入 $i : O_r \to \Pi_8$ 诱导了直到 $r-2$ 维的同伦群的同构.

证明 设映射 $f : S^s \to O_r$ 代表同伦群 $\pi_s(O_r)$ 中的元 $[f]$; 于是在群 SO_{16r} 中我们得到了集合 $\{D^8(x)\}, x \in f(S^7); i(x) \in \Pi_8'$. 因为球面 S_0^7 是固定的, 故在群 SO_{16r} 中存在子集 $\overline{S} = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^8(x)$, 它定义了映射 $F : S^{s+8} \to SO_{16r}$ 使得 $F|_{S^s} = f$ (球面 S^s 为球面 S^{s+8} 的赤道). 现在我们考虑零维球面 $S_k^0 = \{J_k, -J_k\}, 1 \leqslant k \leqslant 7$ 的序列. 固定球面 S_7^0, 我们可以构造对应关系 $\gamma_7 : x \mapsto D^1(x)$, 其中点 $x \in \Omega_8$, 而轨线 $D^1(x)$ 是从点 J_7 到点 $-J_7$ 的极小测地线, 它的中点为点 x. 于是 $D^1(x) \in \Omega_7$, 并且存在映射 $F_7 : S^{s+1} \to \Omega_7$ 使得有关系

$$F_7(S^{s+1}) = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^1(x), F_7|_{S^s} = f,$$

于是由一维莫尔斯理论知道, 对应关系 $f \mapsto F_7$ 定义了同伦群的同构 $\pi_s(\Omega_8) \xrightarrow{\sim} \pi_{s+1}(\Omega_7)$. 固定零维球面 S_6^0, 我们得到了对应关系 $\gamma_6 : y \mapsto D^1(y), y \in \Omega_7$; 显然, 存在映射

$$F_6 : S^{s+2} \to \Omega_6, F_6(S^{s+2}) = \bigcup_{y \in F_7(S^{s+1})} D^1(y), F_6|_{S^{s+1}} = F_7.$$

继续这个过程, 得到了对应关系: $\gamma_7, \gamma_6, \cdots, \gamma_1, \gamma_0$, 其中 $E = J_0$; 映射 $F_0 : S^{s+8} \to \Omega_0 = SO_{16r}$, 而且映射 F_0 在周期同构下对应于 f; 因为 $\bigcup_{x \in f(S^s)} [\gamma_0 \circ \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_7(x)] = \overline{S}$, 故 $F_0(S^{s+8}) = F(S^{s+8})$. 故可以认为 $F_0 \equiv F$. 由于 $\pi_s(\Pi_8) \stackrel{\beta_8}{=\!=} \pi_{s+8}(SO_{16r})$, 引理得证. □

因此, 对于子空间 $i(O_r) \subset \Pi_8$ 已完成了我们所要证明的定理中的 b). 余下要证明的是满足等式 $W = i(O_r)$.

引理 11 有关系式 $i(O_r) \subset W$.

证明 因为圆盘 $i(x)(D^8)$ 为中心平面截影, 故现在的这个引理的论断完全像关于酉周期定理中相应论断那样证明, 即由不等式 $A[f] \leqslant D[f]$ 推出. □

引理 12 成立关系式 $i(O_r) = W$.

证明 设 $f \in W$, 即泛函 D 在这个映射 f 上取极小值. 设 $i_0 : D^8 \to D_0^8$ (见前面); 于是显然有 $A[i_0] = D[i_0]$. 因为 $A[f] \leqslant D[f] = D[i_0] = A[i_0]$, 故完全

像在酉周期性的相应引理的证明时那样, 建立了论断: 圆盘 $f(D^8)$ 是个中心平面截影, 它包含了作为其边缘的球面 S_0^7. 设 $x \in f(D^8)$, 并设向量 x 垂直于所有向量 $E, J_1, \cdots, J_7$; 于是有 $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, 其中 γ 为在圆盘 $f(D^8)$ 中的测地线, 满足 $\gamma(0) = E, \gamma(1) = -E$. 长度 $L(\gamma) = L(\gamma')$, 其中的测地线 γ' 在圆盘 $f(D^8)$ 中, 且有 $\gamma'(0) = E, \gamma'(1) = -E, \gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = J_1$. 所以 γ 为从 E 到 $-E$ 的群 SO_{16r} 中的极小测地线. 由此有: $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \in \Omega_1$, 即 $x^2 = -E$. 因为向量 x 垂直于所有向量 $J_s (1 \leqslant s \leqslant 7)$, 于是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + J_s) \in \Omega_1$, 即 $\frac{1}{2}(x + J_s)^2 = -E$. 因此 $xJ_s + J_s x = 0$, 就是说 $x \in \Omega_8$. 因为 $f(D^8) = D^8(x)$, 故 $f \in i(O_r)$. 引理得证.

因此我们证明了正交周期性, 虽然这个证明不太严格, 但并未应用 "一维" 莫尔斯定理. □

明显地, 在辛群 Sp_n 的情形也完全有类似的定理. 我们略去其形式化的阐述以及证明. 我们打算把它们作为高维变分技术的有益的练习留给读者.

习题 1 推导下面的同伦等价性:

(a) $BSp \sim \Omega\Omega\Omega SO$;

(b) $BO \sim \Omega\Omega\Omega Sp$.(用同样的方法.)

由这些等价得出前八个同伦群 $\pi_i O$, 为 $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, 0, \mathbb{Z}$.

在酉周期性的情形, 我们有过如下的有用命题: 集合 $i(U_m) \subset \Pi_2$ 为点 $i_0 \in \Pi_2$ 在群 $G \cong U_m, G \subset U_{2m}$ 对 Π_2 的共轭作用下的轨道. 在正交周期性的情形, 对 $i(O_r)$ 有类似的命题, 但是我们在定理的证明中并没有用到它.

命题 1 嵌入在空间 Π_8 中的子集 $W = i(O_r)$, 它是群 $G \subset SO_{16r}$ 在所有映射的集合 Π_8 上的共轭作用下点 $i_0 \in \Pi_8$ 的轨道, 其中的 $G = J_8\Omega_8 \simeq O_r$.

证明 只要建立对任意全测地圆盘 $D^8(x), x \in \Omega_8$ 存在元 $g \in SO_{16r}$, 使其满足等式 $gJ_s = J_s g (1 \leqslant s \leqslant 7)$ 和 $gxg^{-1} = J_8$ 即可. 考虑 $g \in SO_{16r}, gJ_s = J_s g (1 \leqslant s \leqslant 7)$; 于是 $g\Omega_8 g^{-1} \subset \Omega_8$, 且 $(gD_0^8 g^{-1}) \bigcap \Omega_8 = gJ_8 g^{-1}$, 即 $gD^8(x)g^{-1} = D^8(gxg^{-1})$. 设 R 为所有 $g \in SO_{16r}$ 中使 $gJ_s = J_s g (1 \leqslant s \leqslant 7)$ 的子群, 并设 $p(g) = gJ_s g^{-1}$ 为 $R \to \Omega_8$ 的自然投射. 我们考察在群 SO_{16r} 中的平移 $g \mapsto J_8 g$. 设 $g \in R, g = \exp A, A \in T_E R$. 因为 $gJ_s = J_s g$, 故 $AJ_s = J_s A$. 故容易看出, $J_8 g$ 与 $J_s (1 \leqslant s \leqslant 7)$ 反交换, 就是说 $J_s g \in \Omega_8, J_8 R \subset \Omega_8$. 反之, 设 $J_8 \exp A \in \Omega_8$; 于是 $AJ_s = J_s A (1 \leqslant s \leqslant 7)$, 或者 $gJ_s = J_s g$, 其中 $g = \exp A$ (即 $g \in R, J_8 R \supset \Omega_8$). 由此得到 $\Omega_8 = J_8 R$. 故而投射 p 为微分同胚, 并且对任意的 $x \in \Omega_8$ 存在有 $g \in R$ 使得 $x = gJ_8 g^{-1}$. 命题得证. □

结论 由上面已证的定理知道,发生在酉和正交周期中的机理都是一样的,而最终的结果只依赖于在什么样的空间上考察高维狄利克雷泛函;在二维圆盘的映射空间的情形我们得到了酉周期性,而在八维圆盘的映射空间的情形,则是正交周期性.

如果不利用与一维作用泛函和长度泛函的有关知识能得到这两个定理的直接证明是颇有意思的事. 倘若有空间 Π_2 的 $2m$ 维骨架 (相应地, 空间 Π_8 的 $(r-2)$ 维骨架) 到子空间 $i(U_m)$ (相应地, $i(O_r)$) 的可缩性就可以立即得到直接的证明了; 这里的 $i(U_m)(i(O_r))$ 是狄利克雷泛函的绝对极小点的集合. 就是说,相应的对于作用泛函的收缩性定理让我们可以得到 $\pi_{i-1}(G^{\mathbb{C}}_{2m,m}) \cong \pi_{i-1}(\Pi_1)$ (参看在闭道空间上经典的莫尔斯理论). 但是对于高维变分问题类似的论断现在还没有出现. 这与出现在高维"普拉托型"问题的研究中出现的典型的困难相关,在那里高维泛函在包含了极值子流形中某个正维子流上可能是退化的.

§26. 莫尔斯理论和平面 n 体问题的某些运动

在本节中我们以莫尔斯理论的观点考虑平面 n 体问题的某些运动. 我们知道, 在一阶近似范围内, 太阳系中实际的行星在一个平面中运动, 即在被称做的黄道平面中. 整个系统的质心以高度的准确性可以假定与太阳的位置相同. 该系统的运动根据经典力学的定律由牛顿位势决定. 像通常那样, 系统的运动由所给初值决定: 需要给出引力粒子的在初始时刻的位置和速度. 众所周知, 这个系统的通解非常复杂 (例如, 按照经典的布伦斯 – 庞加莱 (Bruns – Poincaré) 定理, 该系统除了"经典"的外不存在运动的其他的解析积分).

不管一般问题的复杂性, 但也可以在所有解的集合中挑出一些自然的子集合, 使它们能被简单地描述. 这些子类中有一个被称做"刚体解"的, 即那种特解, 在它所代表的运动中, 系统的所有物体同时以同一个角度在黄道面中旋转. 换句话说, 整个系统就像一个刚体, 它绕着自己的质心旋转. 在这个特殊情形中, 系统的物体之间的相对位置没有改变, 也与时间无关. 在文献中有时称这样系统的周期解为"循环轨线 (Circular trajectory)". 值得注意的情形是对这种 n 体"刚体解"的描述可化成对某种莫尔斯函数的临界点的描述, 另外与光滑流形上莫尔斯函数自然相关的拓扑信息 (见前面) 让我们能做出关于这些循环解几何结构的重要定性表达式. 例如, 非常有意思的问题是: 在二维平面的 n 体系统上, 对应于"刚体解"的运动系统的构形如何? 显然, 远不是每一个由平面中 n 个点形成的构形都能够产生该系统的循环轨线. 当一组带质量物体的系统中, 除去一个外其余的质量都相等时, 这样的特殊构形原来被某个对称的离散群所决定.

有时称这个构形为相对平衡系统.

现在来准确地提出问题. 天体力学中的平面 n 体问题完全由 n 个正实数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 决定. 可以假设全部 n 个物体由二维欧氏平面中的 n 个点表示. 设坐标原点即点 0 与 n 体系统的质心相同. 以一个复坐标 $z_j = x_j + iy_j$ 给出平面中第 j 个点的位置; 因为 0 是系统的质心, 故满足关系式 $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j z_j = 0$. 因此此系统的构形空间是线性子空间 M^{2n-2} (复的超平面), 它属于欧氏空间 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$:

$$M^{2n-2} = \left\{ (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^{2n} \middle| \sum_{j=1}^{n} m_j z_j = 0 \right\}.$$

切丛 $T(M) = M \times M$ (直积) 是系统的相空间.

系统的动能 K 由公式

$$K(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i |v_i|^2$$

给出, 其中 v 为速度向量, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i v_i = 0, |v_i|$ 为在 $\mathbb{R}^2$ 中向量 v_i 的欧氏长度, $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2$ (n 个因子).

我们考虑在系统的构形空间中的一个特殊子集, 它由 "等分线" 超平面组构成, 就是说

$$\Delta_{ij} = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n | z_i = z_j\}, \Delta = \bigcup_{i,j} \Delta_{ij}.$$

系统的势能作为在构形空间 $M \backslash \Delta$ 上函数 V 给出:

$$V(x_1, \cdots, x_n) = -\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_j - z_j|}.$$

于是牛顿的经典方程给出了在余切丛 $T^* = T^*(M \backslash \Delta)$ 上的向量场 X. 系统的构形空间为 $M \backslash \Delta$, 而相空间为 $T^*(M \backslash \Delta)$.

总能量 $E : T \to \mathbb{R}^1$ 依公式 $E = K + V$ 给出. 在坐标 (z, v) 中有: $E(z, v) = K(v) + V(z)$; 定义在 $T^*(M \backslash \Delta)$ 上的函数 $E(z, v)$ 是流 X 的第一积分, 即函数 $E(z, v)$ 在系统 X 的每条积分轨线 $(z(t), v(t))$ 上为常数. 除了这些积分外, 系统 X 还有一个积分 (它在 $T^*(M \backslash \Delta)$ 上的一般点上与积分 E 函数无关), 即角动量, 以 J 表示它, 并且它由公式

$$J(z, v) = \sum_{i=1}^{n} m_i [z_i \wedge v_i]$$

给出, 其中 $[z_i \wedge v_i]$ 表示向量积 (或两个 1- 形式的外积):

$$[z_i \wedge v_i] = z_i^1 v_i^2 - z_i^2 v_i^1,$$

这里的 $z_i = (z_i^1, z_i^2), v_i = (v_i^1, v_i^2)$ 是在平面 $\mathbb{R}^2$ 中向量 z_i, v_i 的笛卡儿坐标.

考虑群 $G = S^1$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的标准作用 (即绕质心的旋转); 于是这个作用产生了在 $M \subset \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2$ (n 个) 和在切丛 $T(M)$ 上显然的作用. 另外, 群 G 保持 (即映到自己)"平分线" 平面 $\Delta_{ij} = \{z_i = z_j\}$ 不变; 从而群 G 保持了 $M\backslash\Delta, T(M\backslash\Delta), K, J, V, E, X$ 不变. 那么, 流 X 自然地定义了在商空间 $T(M\backslash\Delta)/G = T((M\backslash\Delta)/G)$ 上的一个动力系统. 因为还可以另外由在 $\mathbb{C}^n$ 上伸缩群的作用给出商空间, 故我们最后可以化该系统到在 $T(\mathbb{C}P^{n-1}\backslash\widetilde{\Delta})$ 上的系统, 其中的 $\widetilde{\Delta}$ 为在上面所提到的作用群: 旋转和伸缩下 Δ 的商空间. 我们将在以后运用这个商空间, 而现在再回到在 $T(M\backslash\Delta)$ 上的原来的系统.

所存在的这两个积分 E 和 J 让我们能定义映射 $I: T \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 其公式为 $I(\xi) = (E(\xi), J(\xi)) \in \mathbb{R}^2$, 这里的 $\xi = (z, v) \in T(M\backslash\Delta) = T$. 映射 $I: T \to \mathbb{R}^2$ 是光滑的; 我们考虑流形 T 的纤维化, 其纤维为原像 $I_{c,p} = I^{-1}(c, p)$, 其中 $(c, p) \in \mathbb{R}^2; E(\xi) = c, J(\xi) = p$. 原像 $I_{c,p}$ 对几乎所有点 $(c, p) \in \mathbb{R}^2$ 为光滑子流形, 它们在 $T = T(M\backslash\Delta)$ 中的余维为 2. 由 I 的定义知, 所有曲面 $I_{c,p}$ 是两个积分 E 和 J 的水平曲面的联合, 在一般位置的点上有维数 $4n-4-2 = 4n-6$, 这里 T 的维数 $\dim T = 4n-4$.

引理 1　流形 $I_{c,p}$ 对于作用群 $G = S^1$ 和对于流 X 不变.

证明　立即由 S^1 在 $\mathbb{C}^n\backslash\Delta$ 和在 $T(\mathbb{C}^n\backslash\Delta)$ 上作用的描述得到. □

因为 $I_{c,p}$ (即常值能量的曲面 $E = c$ 和常值角动量的曲面 $J = p$) 在 S^1 的作用下不变, 故给出了商空间 $\widetilde{I}_{c,p} = I_{c,p}/S^1$ 的恰当定义.

在经典天体力学的架构中所解决的一个问题是给出了曲面 $I_{c,p}$ 和 $\widetilde{I}_{c,p}$ 的拓扑结构的描述. 我们现在考虑 n 体问题中的循环轨线.

设质量 $m_1, \cdots, m_n$ 固定; 如果构形 $(z_1, \cdots, z_n) = z$ (由点 $z_1, \cdots, z_n$ 的位置给出, 其中 $\sum m_i z_i = 0$) 在 S^1 对 $\mathbb{R}^2$ (从而对 $\mathbb{C}^n$) 的标准作用下所诱导的运动 $z(t) = (z_1(t), \cdots, z_n(t))$ 满足牛顿运动方程, 则称这个构形是**相对平衡的** (记这种构形的集合为 R_e). 换句话说, 每个点 z_i 描出了圆 $z_i(t)$, 而点 $z_1, \cdots, z_n$ 的相对位置保持不变.

集合 $R_e \subset M\backslash\Delta$ 显然对于 S^1 的作用和乘一个纯量的作用 (即对于变换 $z \mapsto \lambda z, \lambda \neq 0$) 不变. 所以能恰当地定义出 R_e 中一个等价类的集合 Φ_n (两个构形 z 和 z' 被认为是等价的意思是说, 如果它们经过正交旋转和乘以纯量后重合).

可以证明对小的 n, Φ_n 能被有效地描述 (见后文).

现在转向通过函数 V (位势) 的临界点来描述相对平衡.

考虑在 $M \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 中的内积 $\langle\ ,\ \rangle$, 它由对称形式 $K(\xi, \eta) = \sum m_i \xi^i \eta^i$ (K 为系统的动能) 给出; 以 $S_K = S_K^{2n-1}$ 记在 M 中对于该内积的单位球面:

$S_K = \{z \in M | K(z,z) = 1\}$. 在这里我们利用了 M 等距同构于它的每个切空间的事实 (我们利用 $M\backslash\Delta$ 为线性空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中 $2n$ 维区域). 以 $S_K\backslash\Delta$ 表示在 S_K 中与等分面 Δ 互补的集合, 即 $S_K\backslash\Delta = S_K\backslash(S_K \bigcap \Delta)$. 我们看出, 用流形 $S_K\backslash\Delta$ 可以刻画出水平曲面 $I_{c,p}$. 事实上, 举个特殊情形的例子: 系统按水平曲面 $I_{c,o}$ 的运动, 它对应了运动的角动量取零值的情形. 如果 $J(z,v) = 0$, 则有 $\sum m_i[z_i \wedge v_i] = \sum m_i(z_i^1 v_i^2 - z_i^2 v_i^1) = 0$, 由此得到下面的几何命题.

命题 1 在具质量 $m_1, \cdots, m_n$ 的平面 n 体问题中, 具有零角动量的动力体系的运动发生在两个第一积分 $E = c =$ 常数和 $J = p = 0$ 的水平曲面上, 即在积分曲面 $I_{c,0}$ 上, 这个曲面具有下面的拓扑结构:

a) 如果能量 $E = c$ 非负, 则 $I_{c,o}$ 微分同胚于直积 $S^{2n-4} \times (S_K\backslash\Delta) \times \mathbb{R}^1$; $I_{c,o}$ 的维数等于 $(2n-4) + (2n-2-1) + 1 = 4n-6$;

b) 如果能量 $E = c$ 为负, 则曲面 $I_{c,o}$ 微分同胚于直积 $\mathbb{R}^{2n-3} \times (S_K\backslash\Delta)$; $I_{c,o}$ 的维数等于 $(2n-3) + (2n-2-1) = 4n-6$.

对应于能量和动量为常值的曲面 $I_{c,p}$ (已给出了任意的值 c 和 p) 也可以用在空间 $S_K\backslash\Delta$ 上某个黎曼纤维化把它表达得十分简单. 因为在进一步的构造中没有用到 $L_{c,p}$ 的拓扑结构, 我们便把这个描述略去了.

现在来详细阐述本节的基本定理.

定理 1 (Smale) 设给出了由平面 n 体问题确定的一组任意的质量 $m_1, \cdots, m_n$. 考虑流形 $S_K : \{K(z) = 1\}, \dim S_K = 2n-3$, 以及在流形 $S_K\backslash\Delta$ 上的函数 V_S; V_S 是 $M\backslash\Delta$ 上所给位势 V 在 $S_K\backslash\Delta \subset M\backslash\Delta$ 上的限制; 设点 $z \in M\backslash\Delta$ 是使 $K(z) = 1$ 的点, 即可以假设 $z \in S_K\backslash\Delta$. 于是点 z (即 n 体的构形) 为相对平衡的充要条件是 z 为函数 V_S 在 $S_K\backslash\Delta$ 上的临界点. 因为相对平衡性且 z 和 $z' = \lambda z$ 被认为是等价的, 故在 Φ_n 的每个类中一定存在点 z, 使得 $K(z) = 1$, 因此函数 V_S 在流形 $S_K\backslash\Delta$ 上的临界点历遍了整个 Φ_n, 即所有等价的相对平衡类.

稍后再给出定理的证明. 现在我们将不加证明地给出关于相对平衡的等价类在分类特征方面的一些结果.

在二体问题的情形 $(n = 2)$, 只有一个相对平衡的等价类. 对三体问题 $(n = 3)$ 有五个相对平衡等价类. 其中有两个类在定向和几何上表现为互不相同的等边三角形的顶点 (称为拉格朗日情形). 三个其他的类构成所谓的共线相对平衡 (欧拉情形). 这表明所有三个点位于同一条直线上, 并在直线上的点 z_1, z_2, z_3 有三种不同但均满足牛顿运动方程的分布方式.

还没有解决的问题是: 对任意一组质量 $m_1, \cdots, m_n$, 集合 Φ_n (即相对平衡的不同等价类的集合) 是否有限? 在所有已知的例子 (到目前为止) 里集合 Φ_n

都是有限的.

转向基本定理的证明. 我们留意到, 这个定理是哈密顿系统的理论的一个一般结果的推论.

设 M 为光滑流形, 即某个力学系统的构形空间, $T = T(M)$ 为该系统的相空间; 动能 K 可以被解释为流形 M 上的一个黎曼度量, 即形式 K_z 可以理解为在切空间 $T_z(M)$ 上的内积. 把总能量 E 写成 $E = K + V$ 的形状. 假定已知上面所定义的所有的量, 那么我们便能用哈密顿方程 (或拉格朗日方程) 定义在切丛 (或余切丛) 上的常微分方程, 即在 $T = T(M)$ 上的光滑向量场. 这些方程可以解释为流形 M 上的二阶微分方程 (参看 [1], 卷 I, 第 5 章).

现在假设这个拉格朗日系统具有一个对称的构形群, 这表明在流形 M 上有某个李群 G 的光滑作用, 并保持黎曼度量 K 和势能 V (在流形 M 上 "几乎处处" 给定) 不变. 换句话说, G 是黎曼度量 K 的等距群的子群; 前面所描述的条件表明群 G 也保持了相应的哈密顿系统 (由 K 和 V 生成). 特别, 位势 V 在群 G 的轨道上为常值.

命题 2　设 M, K, V, G 为具对称群 G 的力学系统, M 为其构形空间, K 为动能 (它即是黎曼度量), V 为 $M\backslash\Delta$ 上的位势, 其中 $\mathrm{vol}(\Delta) = 0; K$ 和 V 对于 G 不变. 设 $X \in \mathcal{G}$, 这里的 $\mathcal{G}$ 为群 G 的李代数. 元素 X 可以解释为流形 M 上的一个光滑向量场. 以 ψ_t 表示流 X 的积分轨线, 也就是说, 方程组 $\dot{z} = X(z)$ 的解. 以 φ_t 表示原来的力学系统的积分轨线, 即由总能量 $E = K + V$ 定义的 M 上二阶微分方程的解. 于是解 $\varphi_t(z)$ 和解 $\psi_t(z)$ 相等 (即对所有 t 有 $\psi_t(z) = \varphi_t(z)$) 的充要条件是初始点 z 是函数 f 在流形 M 上的临界点, 其中的 f 由 $f(z) = V(z) - K(X(z))$ 给出. 当 $V \equiv 0$ 时我们得到在度量 K 下的测地线的一个特性, 即它等同于 M 的等距群的某个单参数子群作用下的轨道.

这个事实的证明是初等的, 可以从所列出的条件得到, 这是个关于把 X 上的流提升到 $T(M)$ 上后, 在 $T(M)$ 上的流 X 的哈密顿系统的简单条件.

我们现在指出, 如何由此命题推出本节的基本定理. 与 M 上的函数 V 一起, 我们还考虑定义在集合 $M\backslash\Delta$ 上的一个新的函数 V_p, 其定义为 $V_p(z) = V(z) + p^2/4K(z)$, 其中 p 为角动量.

我们在前面已引入了空间 $S_K = \{K(z) = 1\}$; 由 M 的定义知, $M\backslash\{0\}$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^+ \times S_K$, 其中 $\mathbb{R}^+$ 代表正实半轴; 所要的微分同胚 $f : M\backslash\{0\} \to S_K \times \mathbb{R}^+$ 由下面的公式给出:

$$f(z) = (\sqrt{K(z)}; z/\sqrt{K(z)}), \sqrt{K(z)} \in \mathbb{R}^+, z/\sqrt{K(z)} \in S_K.$$

显然, 映射 f 在空间 $M\backslash\Delta$ 上的限制把 $M\backslash\Delta$ 微分同胚地映到 $\mathbb{R}^+ \times (S_K\backslash\Delta)$ 上. 把在 $S_K\backslash\Delta$ 上的函数 V_S 看作是位势 V 在子流形 $S_K\backslash\Delta \subset M\backslash\Delta$ 上的限制; 以

$\sigma(d)$ 表示某个映射 d 的临界点集. 我们要证明下列关系式:

1) $\sigma(V_p) = \left\{ z = (t,x) \in (M \backslash \Delta) \simeq \mathbb{R}^+ \times (S_K \backslash \Delta) | x \in \sigma(V_S), t = -\dfrac{p^2}{2V(x)} \right\}$,
其中 $t \in \mathbb{R}^+, x \in S_K \backslash \Delta, z = (t,x)$;

2) $\sigma(V - K(X)) = \left\{ z = (t,x) \in (M \backslash \Delta) \simeq \mathbb{R}^+ \times (S_K \backslash \Delta) | x \in \sigma(V_S), t = \sqrt[3]{-V(x)/2K(x)} \right\}$.

我们注意到有下面显然的等式: $K(z) = t^2$ (见用 (t,x) 表达点 z 的形状), $V(z) = V(t,x) = \dfrac{V(x)}{t}$ (见在平面 n 体问题中位势 $V(z)$ 的显式表达式).

先证明关系式 1). 点 $z = (t,x)$ 为函数 V_p 的临界点当且仅当它的偏导数为零: $\partial_t V_p = 0, \partial_x V_p = 0$ (其中 $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$). 由此得到

$$\begin{aligned}\partial_t V_p(t,x) &= \partial_t \left(V(z) + \frac{p^2}{4K(z)} \right) = \partial_t \left(\frac{V(x)}{t} + \frac{p^2}{4t^2} \right) \\ &= -\frac{V(x)}{t^2} - \frac{p^2}{2t^3} = 0,\end{aligned}$$

即有 $t = -\dfrac{p^2}{2V(x)}$. 又, 计算 $\partial_x V_p(t,x)$ 得到了

$$\partial_x V_p(z) = \frac{1}{t}(\partial_x V(x)) + \partial_x \left(\frac{p^2}{4t^2} \right) = \frac{1}{t} \partial_x V(x).$$

因为 $\mathrm{grad} V_p(t,x) = 0$ 当且仅当 $\partial_x V(x) = 0$ 以及 $t = -\dfrac{p^2}{2V(x)}$, 这便证明了关系式 1).

再证关系式 2). 显然,

$$(V - K(X))(z) = V(t,x) - K(X(t,x));$$

由此得到了

$$\begin{aligned}\partial_t(V(t,x)) - K(X(t,x)) &= \partial_t \left(\frac{V(x)}{t} - t^2 K(X(1,x)) \right) \\ &= -\frac{V(x)}{t^2} - 2tK(X(x)) = 0,\end{aligned}$$

其中 $X(x) \equiv X(1,x)$. 因为 $t \in \mathbb{R}^+$, 故 $t > 0$, 由此得到

$$t^3 = -\frac{V(x)}{2K(X(x))}.$$

进一步计算 $\partial_x(V - K(X))(t,x)$, 我们得到

$$\partial_x \left(\frac{V(x)}{t} - t^2 K(X(x)) \right) = \frac{1}{t} \partial_x V(x) - t^2 \partial_x (K(X(x))) = 0.$$

因为向量场 X 是由等距群的李代数中元素 X 生成的, 故场 X 保持黎曼度量不变 (准确到一个纯量因子). 由此知 $\partial_x(K(X(x)))=0$. 因此最后有 $\partial_x V(x)=0$.

条件 $\operatorname{grad}(V-K(X))(t,x)=0$ 成立当且仅当 $t^3=-\dfrac{V(x)}{2K(X(x))}$ 且 $\partial_x(V(x))=0$. 最后这个条件表明 $\operatorname{grad}_x V(x)=0$, 其中的 $V(x)=V_S(x)$ 是位势 V 从流形 $M\backslash\Delta$ 到子流形 $S_K\backslash\Delta$ 上的限制.

所以这两个关系式 1) 和 2) 都得到了证明.

定理 1 的证明 设 $z=(t,x),K(z)=1$. 于是由命题 1 知道, 点 z 是使得通过它的等距群的单参数子群的轨道与某个力学系统的积分轨线相同的点当且仅当点 z 是函数 $V(z)-K(X(z))$ 的临界点. 由等式 2) 知, 函数 $V(z)-K(X(z))$ (满足 $K(z)=1$) 的临界点的集合与在 $S_K\backslash\Delta$ 上的函数 V_S 的临界点的集合相同. 然而在命题 1 中所描述的临界点产生了通过它们的等距单参数群的轨道 (圆). 在平面 n 体问题中, 这些轨道作为该力学系统的积分轨线, 给出了相对平衡系统的位置的集合. 最后综合所有得到的知识, 我们看出, 点 $z\in M\backslash\Delta,K(z)=1$ 为相对平衡的当且仅当它是位势 V 限制在 $S_K\backslash\Delta$ 上的函数 V_S 的临界点. 定理 1 完全证完. □

现在我们可以转而研究相对平衡的特殊类, 即所谓的*共线相对平衡*, 也就是说, 这时所有在平面上的 n 体均位于一条直线上. 我们将算出对于任意 n, 这种特殊平衡状态 (位置) 的准确个数, 所用的方法是上面得到的关于势能函数的临界点的知识.

定理 2 (Moulton) 对于平面 n 体问题所给出的任意质量组 $m_1,\cdots,m_n$, 正好总存在 $\dfrac{n!}{2}$ 个该系统的共线相对平衡类, 就是说, 存在 $\dfrac{n!}{2}$ 个相对平衡类, 这时给出系统的 n 体位置的所有点 z_i 均分布在通过质心的一条直线上, 并且在运动过程中, 这条直线绕质心 (即坐标原点) 旋转; 这时每个点描画出了循环轨线 (即中心在坐标原点的圆).

设在系统所在平面 $\mathbb{R}^2$ 中选定了一条直线 l. 它由子集 $M_l\subset M$ 唯一确定, 其中 M_l 由点 $(z_1,\cdots,z_n)=z$ 组成, 使得所有的坐标 z_i 都属于直线 l. 像以前那样, 我们去掉子集 Δ, 即等分平面, 并构造子集 $S_l=S_K\bigcap M_l, S_l\backslash\Delta=S_l\backslash(S_l\bigcap\Delta)$. 考虑圆 S^1 在集合 S_K 上的作用; 显然, 只有在平面旋转了角 π 时, 集合 S_l 才保持不动. 因此, 在集合 S_l 上有二阶群 $\mathbb{Z}_2$ 的自然作用. 考虑商空间 $S_l/\mathbb{Z}_2$, 这里的 l 是前面那条在二维平面中固定的直线. 因为固定这样的直线就唯一确定了 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的每条通过坐标原点的复直线 (即二维实平面) 中的某条实直线, 于是所有这些实直线 (出现在考虑所有的复直线时) 自然等同于实的射影空间, 即给出了微分同胚 $S_l/\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{R}P^{n-2}$. 那么所描述的每条实直线到它相应的复直线的

嵌入可以看作是这条实直线的复化, 即嵌入 $S_l/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}P^{n-2} \to \mathbb{C}P^{n-2}$, 它把直线 l 变到平面 $\mathbb{R}^2$, 这等同于实射影空间到复射影空间的标准嵌入. 因此诱导出了嵌入 $\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}^{P-2}) \to \mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}$. 在 $\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}$ 上考虑光滑函数 $\widetilde{V}:\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}\to\mathbb{R}^1$, 它是由位势 $V: M\backslash\Delta\to\mathbb{R}^1$ 所诱导, 而 $\widetilde{\Delta}=\Delta/S^1$.

引理 2 相对平衡类的个数正好等于光滑函数 $\widetilde{V}:\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}\to\mathbb{R}^1$ 的临界点数.

证明 由前面关于平衡类的定义知, 每个相对平衡类由包含在其中的一个法化相对平衡所唯一决定, 由定理 1 又知道这个法化相对平衡唯一地对应于函数 $\widetilde{V}$ 的临界点. 这里我们用到了这样的事实, 即当旋转二维平面时, 相对平衡仍变到了相对平衡, 即正交变换把平衡类变到自己. □

命题 3 (斯梅尔) 共线相对平衡类相互一一地对应于光滑函数 $\widetilde{V}:\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}\to\mathbb{R}^1$ 位于 $\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-2})\subset\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}\subset\mathbb{C}P^{n-2}$ 中的临界点 (这里的包含映射是前面给出的标准嵌入).

证明 如果由数组 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 给出的相对平衡 (即构形) 为共线, 则所有这些复数都在同一条直线上, 并用二维平面的正交变换可以把它们变到原先选出的固定直线 $l\in\mathbb{R}^2=\mathbb{C}^1$ 上. 又, 一方面我们仍然保持在一个共线相对平衡类之中, 另一方面则表现为势能限制在实子流形 $\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-2})$ 时的临界点, 这里的实子流形以标准方式嵌入在 $\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}$ 中. 命题得证. □

于是, 为了刻画共线相对平衡只要描绘出位势的那些位于一个实子流形中的临界点即可, 这里的实子流形是个实射影子空间. 又为了描绘出这些临界点, 那么研究位势在该实子空间上限制函数的所有临界点则是方便的. 在一般情形中, 在子流形上限制的函数的临界点自然绝对不必要是这个函数在整个承载空间中的临界点 (当然反过来是对的). 但就像我们正要证明的, 在这个已知的具体情形中, 限制在实子空间上的位势的临界点和 "全" 位势的位于这个实子空间上的临界点之间, 存在着相互一一的对应.

命题 4 如果 $z\in\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-2})$ 是位势 $\widetilde{V}$ 在子流形 $\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-2})\subset\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}$ 上限制函数的临界点, 则这个点是 "全" 位势 $\widetilde{V}:\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}\to\mathbb{R}^1$ 的临界点.

证明 考虑固定的质量 $m_1,\cdots,m_n$ 以及位势 $V(z)=-\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{m_im_j}{|z_i-z_j|}$. 于是成立下面的公式:

1) 函数 V 的第一微分等于

$$dV(z)(v)=\sum_{i\neq j}\frac{m_im_j}{|z_i-z_j|^3}\langle z_i-z_j,v_i-v_j\rangle,\quad v\in M;$$

2) 函数 V 的二阶微分等于

$$d^2V(z)(v,w) = -\sum_{i\neq j}\frac{m_im_j}{|z_i-z_j|^3}\left(\frac{3}{|z_i-z_j|^2}\langle z_i-z_j, v_i-v_j\rangle - \langle v_i-v_j, w_i-w_j\rangle\right)$$
$$= Q_z(v,w),\quad 其中 v,w\in M.$$

在这里以 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示在平面 $\mathbb{R}^2$ 中向量的欧氏内积.

3) 函数 V 在 $S_K\backslash\Delta$ 上限制的二阶微分等于

$$d^2V|_{(S_K\backslash\Delta)}(z)(v,w) = Q_z(v,w) + V(z)K(v,w).$$

在这里的 K 表示了该系统的动能, 它被看作是由所给质量 $m_1,\cdots,m_n$ 定义的一个内积. 所有这些公式可由在局部笛卡儿坐标下进行多次微分的直接计算得到, 所以我们略去细节, 让读者去验算这些公式.

对每一个 $v_i\in\mathbb{R}^2$, 令 $v_i=(v_i',v_i'')$, 其中 $v_i'\in l, v_i''\in l^\perp$, 它们都在 $\mathbb{R}^2$ 中. 于是向量 v 可以写成一个分解式: $v=(v',v'')$, 其中 $v'=(v_1',\cdots,v_n')$. 对任意向量 $v\in M$ 都有这个分解. 如果 $z\in S_l\subset S_K, z\notin\Delta$, 则 $T_zS_K=\{v\in M; v\perp z\}; T_zS_l=\{v'\in M_l; v'\perp z\}$, 其中的流形 M 上有一个固定的内积 K, 它由系统中已知的点的质量所决定. 如果 $v\in T_zS_K, v=(v',v'')$, 则因为 $K(v,z)=K(v',z)$, 有 $v'\in T_zS_l$. 再由上面得到的公式 1)—3) 推出: 如果 $z\in S_l\backslash\Delta, v\in T_zS_K$, 则 $dV(z)(v)=dV(z)(v')$. 但是等式 $dV(z)(v')=0$ 推出了 $dV(z)(v)=0$. 最后这个等式给出了命题的证明. □

引理 3　流形 $\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-2})$ 的道路连通分支个数为 $\dfrac{n!}{2}$.

证明　这是个几何的论断, 可以由等分平面的定义推出. 事实上, 我们固定点 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in S_l\backslash\Delta$, 并设 $z_1<\cdots<z_n\in\mathbb{R}$ (在这里我们用到了它们中没有两个坐标数相等的事实). 现设给出了数组 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意一个置换 $\sigma=(i_1,\cdots,i_n)$. 将此置换用于原来的向量 z 的坐标上, 我们便将其变到了另一个道路连通分支, 显然, 是由所给置换唯一定义的 (因为对属于同一个道路连通分支的所有向量, 按其大小的向量坐标的排序是相同的, 并由所给出的置换确定). 所以, 集合 $S_l\backslash\Delta$ 由 $n!$ 个分支构成, 于是商空间 $\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-1})$ 由 $\dfrac{n!}{2}$ 个连通分支组成. 引理得证. □

引理 4　如果点 $z\in\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-2})$ 是位势 $\widetilde{V}$ 在 $\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-2})$ 上的限制函数的临界点, 则点 z 是非退化极大.

证明　利用上面得到的公式 2). 那么由此公式显然可以知道, 函数 $V: S_l\backslash\Delta\to\mathbb{R}$ 的二阶微分 $d^2V|_{(S_l\backslash\Delta)}(z)$ 是一个负定的形式, 从而引理得证. □

共线相对平衡定理的证明

由定义位势 $\widetilde{V}$ 的显式表达式知道, 这个函数当点 z 趋向于集合 Δ 时, 它趋向于 $-\infty$; 这表明在集合 $\mathbb{R}P^{n-2}\backslash(\widetilde{\Delta}\bigcap\mathbb{R}P^{n-2})$ 的每个道路连通分支的边缘上函数 $\widetilde{V}$ 都趋向 $-\infty$, 从而在每个连通分支上有极大值. 由莫尔斯理论很快知道. 在每个道路连通分支中不可能有两个临界点, 否则, 因为每个这种点都是非退化极大, 将会至少还产生一个鞍临界点, 它不是局部极大. 所得矛盾证明了, 在每个连通分支正好有一个非退化极大点 (不会有更多的其他临界点). 因为我们已知连通分支的个数正好等于 $\frac{n!}{2}$, 故而完成了定理的证明. □

由所证的定理清楚看出, 关于系统的所有物体的共线性 (即它们位于同一条直线上) 处在证明的一种十分实质性的主要地位, 就是说, 它让我们可以完全算出所有这种平衡位置的个数.

如果我们又回到更一般的计算相对平衡类个数的问题 (即不加共线的条件), 那么我们应该能够刻画出位势函数的临界点的指数和数量, 这时的位势不只是在实射影空间上的, 而是在复射影空间上的函数, 这已经是非常困难的问题了.

旋转群 S^1 作用在 S_K 上, 使特殊的子集 Δ 和位势 V (参看前面有关内容) 不变. 正如我们已经看到的, 商空间 S_K/S^1 自然地等同于复射影空间 $\mathbb{C}P^{n-2}$, 而特殊的集合 $\widetilde{\Delta}=\Delta/S^1$ 可以看作 $\mathbb{C}P^{n-2}$ 中复的射影子空间的并. 重新考虑一下由原来位势 V 所诱导的函数 $\widetilde{V}:\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}\to\mathbb{R}^1$.

猜想. 对平面 n 体问题中几乎所有的质量值 $(m_1,\cdots,m_n)$, 由原来的位势函数 V 诱导的位势 $\widetilde{V}$ 是莫尔斯函数, 就是说这个光滑函数的所有临界点都是非退化的.

这个猜想目前既没有得到实证也没证明其不成立. 该猜想出现在试图回答相对平衡类的个数是否有限的问题 (对几乎所有的质量组而言) 中. 可以证明 (我们略去不证) 在特殊集 $\widetilde{\Delta}$ 于流形 $\mathbb{C}P^{n-2}$ 的某个开邻域中, 函数 $\widetilde{V}$ 没有任何一个临界点. 由此知道, 如果上面提出的那个猜想为真, 立刻可推出函数 $\widetilde{V}$ 的临界点数, 即相对平衡类的个数 (对几乎所有的质量组) 为有限.

我们再指出这个猜想的一个推论. 如果此猜想成立, 则对几乎所有的质量组的相对平衡类的个数有下面的形式的估值. 给予每个相对平衡一个非负数, 即诱导位势 $\widetilde{V}$ 的某个临界点的指数, 其中的这个临界点是对应于这个相对平衡类的 (见前面的定理). 于是具有给定指数的相对平衡类的数量与相应的莫尔斯不等式有关 (参看前面的基础理论), 此不等式涉及空间 $\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}$ 的贝蒂数 (即实系数同调群的秩). 特别地, 空间 $\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}$ 的十分 "丰富" 的同调群能够证明非平凡相对平衡的存在性. 空间 $\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}$ 的上同调环可以以显式计算出来 (阿尔诺德, Арнольд), 就是说, 这个环同构于一个十分简单的拓扑空间 X 的上同调环, 这里的 X 是两个圆的束与三个圆的束, 与四个圆的束直至与 $(n-1)$ 个圆的束

的乘积空间. 空间 $\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}$ 的庞加莱多项式的显式表达式为 $\prod_{\alpha=2}^{n-1}(1+\alpha t)$, 即

$$H^*(\mathbb{C}P^{n-2}\backslash\widetilde{\Delta}) = H^*((S^1 \vee S^1) \times (S^1 \vee S^1 \vee S^1) \times \cdots).$$

第三章 配边论和光滑结构

§27. 示性数. 配边. 闭链和子流形. 流形的符号差

I. 问题的提法. 配边的最简单知识. 符号差

利用前面各章发展出来的工具, 我们在这里考虑某些光滑流形理论的问题.

1. 关于配边问题. 设给出了一个闭光滑流形 M^n. 在什么情形下它是一个光滑紧的具边缘的流形的边缘: $M^n = \partial W^{n+1}$? 在 M^n 和 W^{n+1} 都有定向的情形可提出相似的问题.

2. 关于闭链的子流形实现问题. 设 $x \in H_i(M^n;\mathbb{Z})$ 或 $y \in H_i(M^n;\mathbb{Z}_2)$. 在什么情形下存在闭子流形 $M^i \subset M^n$ 它代表了闭链 y (如 M^i 定向, 代表了 x)?

3. 关于闭链的流形连续像的实现问题. 设 $x \in H_i(X;\mathbb{Z})$, 或者 $y \in H_i(X;\mathbb{Z}_2)$ 为某个胞腔复形 X 的同调元. 在什么情况下存在 "奇异下配边" (M^i, f), 即流形 M^i 和映射 $f: M^i \to X$, 使得 $f_*[M^i] = y$ (或者 $f_*(M^i) = x$, 这时 M^i 为定向流形)? 在相对同调的情形可提出类似的问题.

设 $x \in H_i(X,Y;\mathbb{Z})$ 或 $y \in H_i(X,Y;\mathbb{Z}_2)$. 要找出流形 M^i, 其边缘为 W^{i-1} 和映射 $f:(M^i, W^{i-1}) \to (X,Y)$ 使得 $f_*[M^i, W^{i-1}] = y$ (或在定向情形等于 x).

可自然地定义 "奇异下配边" 群: 奇异下配边缘上面所描述的, 是偶对 (M^i, f), 其中 M^i 为闭流形. 闭链是指奇异下配边的形式线性组合.

奇异膜是偶对 (W^j, f), 其中 W^j 为带边流形. 奇异膜的边缘是个奇异闭链. 所有 i 维闭链 (奇异下配边) 对 $(i+1)$ 维膜的边缘的商群称为 "下配边群", 并记其为 $\Omega_i^O(X)$. 群 $\Omega_i^O(X,Y)$ 以类似的方法定义: 闭链是带边流形的映射, 其边缘的像在 $Y \subset X$ 中, 而膜概念的引进是自然的.

由定向流形和膜的类出发, 则处在类似的 "定向下配边" 情形, 以 $\Omega_i^{SO}(X)$

和 $\Omega_i^{SO}(X,Y)$ 表示. 有显然的映射

$$\Omega_i^O(X) \to H_i(X;\mathbb{Z}_2),$$
$$\Omega_i^O(X,Y) \to H_i(X,Y;\mathbb{Z}_2),$$
$$\Omega_i^{SO}(X) \to H_i(X;\mathbb{Z}),$$
$$\Omega_i^{SO}(X,Y) \to H_i(X,Y;\mathbb{Z}).$$

按定义, 群 Ω_i^O 和 Ω_i^{SO} 同伦不变. 对于可缩空间 X (或点), 群 Ω_i^O 和 Ω_i^{SO} 可以是非平凡的. 称这些群 Ω_i^O 和 Ω_i^{SO} 为**经典配边群**. 流形的直积在这些群中引进了反交换的环结构:

$$\Omega_i^O \Omega_j^O \subset \Omega_{i+j}^O, xy = yx,$$
$$\Omega_i^{SO} \Omega_j^{SO} \subset \Omega_{i+j}^{SO}, xy = (-1)^{ij} yx.$$

在群 $\Omega^O = \sum\limits_{i\geqslant 0} \Omega_i^O$ 中有等式

$$2x = 0.$$

它显然由等式

$$\partial(M^i \times I) = M^i \cup M^i = 2M^i$$

得到.

考虑到定向我们在 $\Omega^{SO} = \sum\limits_{i\geqslant 0} \Omega_i^{SO}$ 中得到

$$\partial(M^i \times I) = M_+^i \cup M_-^i.$$

这表明, 具有相反定向的流形在 Ω^{SO} 中给出相反的元, 因为这个和给出了流形的形式并.

基本信息是

a) $\Omega_0^O = \mathbb{Z}_2, \Omega_0^{SO} = \mathbb{Z}$;

b) $\Omega_1^O = \Omega_1^{SO} = 0$;

c) $\Omega_2^{SO} = 0$ (由曲面分类知道, 所有的定向流形 M^2 都可置于 $\mathbb{R}^3$ 中, 并以区域 W^3 为界)

我们来计算群 Ω_2^O.

引理 1　如果闭流形 M^i 为边缘, 即 $M^i = \partial W^{i+1}$, 于是它的欧拉示性数为偶数: $\chi(M^i) = 2m$.

证明　a) 设 $i = 2k+1$. 于是由同调群的庞加莱对偶知 $\chi(M^i) = 0$.

b) 设 $i=2k$. 考虑 "二重" W^{2k+1}:

$$V^{2k+1}=W^{2k+1}\bigcup_{M^{2k}}W^{2k+1}.$$

由对单纯剖分复形的 χ 的定义知道

$$\chi(X\bigcup_{L}Y)=\chi(X)+\chi(Y)-\chi(L),$$

其中 $L=X\bigcap Y$.

我们得到 (因 V^{2k+1} 的维数也是奇数):

$$0=\chi(V^{2k+1})=2\chi(W^{2k+1})-\chi(M^{2k}).$$

引理得证. □

因为 $\chi(\mathbb{R}P^2)=1$, 故

$$\mathbb{R}P^2\neq\partial W^3,\quad \Omega_2^O\neq 0.$$

容易构造出膜 W^3 使 $\partial W^3=K^2$ (克莱因瓶). (请找出这个膜!) 由曲面的分类 (见 §3) 知道, 任意非定向二维闭流形或者是 $\mathbb{R}P^2+$ (环柄), 或者 K^2+ (环柄). 由此有结果:

$$\Omega_2^O=\mathbb{Z}_2([\mathbb{R}P^2]\text{为基元}).$$

利用几何的技术可以证明, $\Omega_3^O=\Omega_3^{SO}=0$ 及 $\Omega_4^{SO}=\mathbb{Z}$ (罗赫林,Рохлин). 我们从托姆 (Thom) 理论中既可得到上面这些结果也可得到许多其他结果; 托姆的理论使用了我们以前所讲述过的上同调方法. 下面是引理 1 的推广.

引理 2 (庞特里亚金, Понтрягин) a) 如果闭流形 M^i 在 O- 配边理论 Ω_*^O 中为边缘, 则它的所有稳定示性数 (即 i 维稳定示性类) 等于 0(mod2).

b) 如果定向闭流形 M^i 在 SO- 配边论 Ω_*^{SO} 中为边缘 (即定向流形 W^{i+1} 的边缘), 则还有它的所有稳定示性数 (即 i 维类在 $[M^i]$ 上的取值) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 的上同调中也为零.

证明 万有丛底空间中的切映射 (广义的高斯映射 $M^i\xrightarrow{\tau}G_{i,N}=BO_i$) 给出了切丛 (例如由嵌入 $M^i\subset\mathbb{R}^N, N\to\infty$). 每个元 $w\in H^*(G_{i,N};\mathbb{Z}_2)$ 定义了一个 mod 2 的示性类 (参看 [1], 卷 II, §25). 按照定义, 令

$$w(M^i)=\tau^*(w).$$

所谓 "稳定" 示性类 $w\in H^*(BO_i)$ 是由限制

$$w=\lambda^*\overline{w}$$

得到, 其中 $\overline{w} \in H^*(BO_{i+1}), \lambda : BO(i) \to BO(i+1)$. 类似地, 定义对 $BSO(i)$, $BU(i), BSp(i)$ 的稳定示性类的概念.

如果 $M^i = \partial W^{i+1}$, 则我们有 $w(M^i) = \tau_M^*(w) = \tau_M^* \lambda^*(\overline{w}), \overline{w}(W^{i+1}) = \tau_W^*(\overline{w})$. 以 j 表示嵌入 $M^i \to W^{i+1}$. 纤维化映射的限制有形式 $\tau_W|_{M^i} = j^*\tau_W = \tau_M \oplus 1$. 设 $\dim w = i$. 于是

$$w(M^i) = \tau_M^* \lambda^*(\overline{w}) = j^* \tau_W^*(\overline{w}).$$

因为 $j_*[M^i] = 0$ (由于 $M^i = \partial W^{i+1}$), 故而对于内积, 我们有

$$(j^* \tau_W^*(\overline{w}), [M^i]) = (\tau_W^*(\overline{w}), j_*[M^i]) = 0.$$

于是 a) 得证.

对 b) 的证明完全类似于前面, 只须将 $\mathbb{Z}_2$- 上同调换为在 $\mathbb{Q}$ 上的上同调, 并考虑到在定向情形时等式 $j^*(M^i)$ 在 $H_i(W^{i+1})$ 中为零仍在有理上同调中成立. 引理 2 得证. □

$\chi(M^i)$ 是非稳定示性类的例子. 斯蒂弗尔 - 惠特尼类 $w_q \in H^q(M^i;\mathbb{Z})$ 和由它们的 i 维元的多项式, 还有庞特里亚金类 $p_q \in H^{4q}(M^i;\mathbb{Q})$ 和它们所有 i 维 $(i = 4k)$ 元的多项式给出全部 Ω_i^O 和 Ω_i^{SO} 的稳定示性类.

例 1 $M^2 = \mathbb{R}P^2$; 在这里 $w(z) = (1+zt)^3 = 1 + w_1 z + w_2 z^2$, 其中 $t \in H^1(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2), t = w_1 \neq 0$. 因此 $w_1^2 \neq 0, w_2 \neq 0 (\text{mod } 2)$. 但是群 $\Omega_i^O = \mathbb{Z}_2$, 故有 $w_1^2 - w_2 \equiv 0 (\text{mod } 2)$.

例 2 $M^4 = \mathbb{C}P^2$; 自然定向. 这里庞特里亚金类 $p(z) = (1+z^2t^2)^3 = 1 + p_1 z^2$. 故 $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3$ (在 §9 中讲过了 $\mathbb{C}P^n$ 的庞加莱多项式 $p(z)$), $t \in H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Q})$ 是群 $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$ 的基元.

例 3 a) $M_1^8 = \mathbb{C}P^4$, 自然定向. 其 $p(z) = 1 + p_1 z^2 + p_2 z^4 = (1+t^2z^2)^5 = 1 + 5t^2z^2 + 10t^4z^4$, t 为群 $H^2(\mathbb{C}P^4;\mathbb{Z})$ 的基元.

其示性数为

$$p_1^2 = 25, \quad p_2 = 10.$$

b) $M_2^8 = \mathbb{C}P_1^2 \times \mathbb{C}P_1^2$. 其 $p(z) = 1 + p_1 z^2 + p_2 z^4 = (1+t_1^2z^2)^3 \cdot (1+t_2^2z^2)^3 = 1 + 3(t_1^2+t_2^2)z^2 + 9t_1^2t_2^2z^4$, 其中 $t_i \in H^2(\mathbb{C}P_i^2;\mathbb{Z})$ 为基元.

另外有: $(t_1^2) = 0, (t_2^2)^2 = 0, (t_1^2+t_2^2)^2 = 2t_1^2t_2^2$. 示性数为:

$$p_1^2 = 18, \quad p_2 = 9.$$

除了示性数外还有一个对于 $4k$ 维流形的 SO- 配边不变量, 称其为流形的 “*符号差*”. 由于庞加莱对偶 (参看 §15), 在中间维数的同调群上定义了一个双线

性幺模整形式, 它在维数 $4k$ 时为对称, 在维数 $4k+2$ 时为反称 (例如, 在 $k=0$ 时的定向曲面).

这个形式由同调群 $H_{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$ 的闭链的 "相交数" 给出, 或者由上同调群 $H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q}) \approx H_{2k}(M^{4k},\mathbb{Q})$ 的上链乘积给出:

$$\langle x,y\rangle = (xy,[M^{4k}]), x,y \in H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$$

或者

$$\langle \widetilde{x},\widetilde{y}\rangle = \widetilde{x}\circ\widetilde{y}(\text{相交数}), \widetilde{x},\widetilde{y} \in H_{2k}(M^{4k};\mathbb{Q}).$$

定义 1 称在群 $H_{2k}(M^{4k};\mathbb{Z})$ 上的上面指出的形式中正和负的平方项数之差为该流形的 "符号差". 在改变定向 $M^{4k} \mapsto -M^{4k}$ 时, 相应的形式和符号差也改变符号. 以 $\tau[M^{4k}]$ 记此符号差.

引理 3 (罗赫林) 边缘流形的符号差等于零, 并定义了一个线性形式

$$\tau : \Omega_{4k}^{SO} \to \mathbb{Z}.$$

习题 1 证明流形直积的符号差等于符号差的乘积.

于是我们得到了环同态

$$\tau : \Omega_*^{SO} = \sum_{i\geqslant 0} \Omega_i^{SO} \to \mathbb{Z},$$

其中 $\tau(1)=1$; 当 i 不被 4 除尽, $\Omega_i^{SO} \to 0$.

引理 3 的证明 显然, 流形不交并的符号差等于各个流形的符号差之和. 我们将证明边缘流形的符号差等于零. 设 $M^{4k} = \partial W^{4k+1}$. 我们以 j 表示嵌入, $j : M^{4k} \to W^{4k+1}$. 我们知, 在群 $H_{4k}(W^{4k+1},\mathbb{Q})$ 中 $j_*[M^{4k}]=0$. 如果上链 x, y 是上闭链 $\bar{x},\bar{y} \in H^{2k}(W^{4k+1};\mathbb{Q})$ 在 M^{4k}上的限制, 则应有 $\langle x,y\rangle = 0$. 事实上, 如果 $x = j^*(\bar{x}), y = j^*(\bar{y})$, 于是

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= (xy,[M^{4k}]) = (j^*(\bar{x}\,\bar{y}),[M^{4k}]) \\ &= (\bar{x}\,\bar{y}, j_*[M^{4k}]) = 0.\end{aligned}$$

(对于闭链 $\widetilde{x},\widetilde{y}$, 这表明了一个直观的事实: 如果两个闭链在 W^{4k+1} 中同调于零, 则它们的相交数为 0.) 我们将证明子群 $j^*H^{2k}(W^{4k+1};\mathbb{Q}) \subset H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$ 的维数等于 $H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$ 维数的一半. 我们写出空间对 $(M^{4k};W^{k+1})$ 的有理上同调和同调群的正合序列, 它们对应项之间按庞加莱对偶对应:

$$\begin{array}{ccccc} H^{2k}(W^{4k+1}) & \xrightarrow{j^*} & H^{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{\delta} & H^{2k+1}(W^{4k+1},M^{4k}) \longrightarrow \\ \Big\| D & & \Big\| D & & \Big\| D \\ H_{2k+1}(W^{k+1},M^{4k}) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{j_*} & H_{2k}(W^{4k+1}) \longrightarrow . \end{array}$$

由于庞加莱对偶算子的原因, 同态 j^* 变到了 ∂, 同态 δ 变到 j_*. 故而算子 j^* 和 δ 相互对偶, 而群 $H^{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k})$ 对偶于 $H^{2k}(W^{4k+1})$, 而 $H^{2k}(M^{4k})$ 与自己的对偶同构: $(H^{2k}(M^{4k}))^* = H_{2k}(M^{4k})$, 这可通过非退化形式 $\langle x, y\rangle$ 得到. 于是由纯代数的讨论得知 $\mathrm{Im} j^*$ 和 $\mathrm{Im}\delta$ 作为群, 其秩相等. 因序列的正合性, 像 $\mathrm{Im} j^*$ 的秩等于群 $H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$ 秩的一半. 又由形式 $\langle x, y\rangle$ 的非退化性和具-半维数的空间 $\mathrm{Im} j^*$ 为其零空间的事实推出 $\tau = 0$, 引理得证. □

上面已经提到 $\Omega_4^{SO} = \mathbb{Z}$ (以后将证明 $\Omega_4^{SO} \oplus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$). 在例 2 中算出了数 $p_1[\mathbb{C}P^2] = 3 \neq 0$. 我们又注意到, 因为形式 $\langle x, y\rangle$ 在群 $H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ 上有形式 $\langle x, x\rangle = 1$ (它显然由 $H^*(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Q})$ 的环结构得到, 参看 §7), 故 $\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$. 因为 $\tau = 1$, 故元 $[\mathbb{C}P^2]$ 不可能是群 $\Omega_4^{SO} = \mathbb{Z}$ 中某个元的倍数 (非平凡), 且任意元 $x \in \Omega_4^{SO}$ 具有形式 $x = \lambda[\mathbb{C}P^2]$. 由此立即得出结论 (托姆 - 罗赫林公式): 对任意定向流形成立公式

$$\tau[M^4] = \frac{1}{3}p_1[M^4] \qquad (*)$$

事实上, 对 $\mathbb{C}P^2$ 我们有

$$p_1[\mathbb{C}P^2] = 3, \quad \tau[\mathbb{C}P^2] = 1.$$

故而量 $p_1 - 3\tau$ 在 $\mathbb{C}P^2$ 上为平凡, 从而对所有元素 $x \in \Omega_4^{SO}$ 也如此, 这是因为 $x = \lambda[\mathbb{C}P^2]$. 只要证明 $\Omega_4^{SO} \otimes \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}$ 即可. 以后我们将计算群 $\Omega_i^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ 并得到公式 $(*)$ 的推广形式: 希策布鲁赫 (Hirzebruch) 公式.

类似于欧拉示性数. 符号差也可对非闭流形定义. 事实上, 如果 $M = M^{4k}$ 为光滑定向流形, 其边缘为 $V = V^{4k-1} = V_1 \bigcup \cdots \bigcup V_m$, 那么一般说来, 在闭链的群 $H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{Q})$ 上定义了一个退化形式. 称这个形式的符号差为流形的符号差, 即 $\tau(M^{4k})$. 成立下面的 "可加性" 的性质 (诺维可夫 - 罗赫林)

符号差的可加性. 设 M_1^{4k} 和 M_2^{4k} 为带边光滑流形

$$\partial M_1^{4k} = \bigcup_j V_j^{4k-1}, \partial M_2^{4k} = \bigcup_q W_q^{4k-1}$$

且 $V_1^{4k-1} = W_1^{4k-1}$. 则成立等式

$$\tau(M_1^{4k} \bigcup_{V_1 = W_1} M_2^{4k}) = \tau(M_1^{4k}) + \tau(M_2^{4k}).$$

因此, 当沿两个流形的边界的一个分支粘合时, 其符号差为两个符号差之和. 类似的事实对偶维流形的欧拉示性数也成立:

$$\chi(M_1^{2q} \bigcup_{V_1} M_2^{2q}) = \chi(M_1^{2q}) + \chi(M_2^{2q}) - \chi(V_1),$$

其中 $\chi(V_1) = 0$, 这是因为 V_1 为奇维闭流形.

证明 证明符号差的可加性. 同调群 $H_{2k}(M_1^{4k})$ 和 $H_{2k}(M_2^{4k})$ 可以表示为形状 $H_{2k}(M_s^{4k}) = A_s \oplus B_s, B_s = \text{Im } i_s$, 其中 $i_s : V_1 = W_1 \to M_s^{4k}, s = 1,2$. 因为相交形式只集中在子空间 A_s 的闭链上, 故而 $\tau(M_s^{4k}) = \tau(A_s)$. 群 $H_{2k}(M_1^{4k} \bigcup_{V_1=W_1} M_2^{4k})$ 可表示为下面形状:

$$H_{2k}(M_1 \cup M_2) = A_1 \oplus A_2 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus D \oplus F,$$

其中

$$\begin{aligned}
&B_1 = C_1 \oplus D = \text{Im } i_{1*}, \quad i_{1*} : H_{2k}(V_1) \to H_{2k}(M_1), \\
&B_2 = C_2 \oplus D = \text{Im } i_{2*}, \quad i_{2*} : H_{2k}(W_1) \to H_{2k}(M_2), \\
&E \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus D = H_{2k}(V_1) = H_{2k}(W_1), \\
&E = \text{Ker } i_{1*} \cap \text{Ker } i_{2*} \subset H_{2k}(V_1), \\
&D = \text{Im}\{H_{2k}(V_1) \to H_{2k}(M_1 \bigcup_{V_1} M_2)\}.
\end{aligned}$$

子群 F 同构于交

$$F' = \text{Ker } i_{1*} \bigcap \text{Ker } i_{2*} \subset H_{2k-1}(V_1) = H_{2k-1}(W_1),$$

这时张在 $F' \subset H_{2k-1}(V_1)$ 中同一个闭链上的两个分别属于 M_1 和 M_2 的膜一起给出了群 $F \subset H_{2k}(M_1 \bigcup M_2)$ 中一个闭链. 在群 $H_{2k}(M_1 \bigcup M_2)$ 上的相交形式具有分块矩阵的形状, 其中 a) $C_1 \oplus C_2$ 为形式的零化子; b) 在每个空间 C_1, C_2, D, F 上该形式都分别为平凡, 但空间 F 和 D 相互对偶; c) 子空间 A_1, A_2 按此形式与所有其他的子空间两两正交.(请验证此简单的论断!) 由此便得出

$$\tau(M_1 \bigcup_{V_1} M_2) = \tau(A_1) + \tau(A_2).$$

可加性得证. □

II. 托姆复形. 配边群的计算 (模去挠元). 符号差的形式. 闭链的子流形实现

考虑连通闭的光滑流形 B 和以 B 为底空间, 纤维为 $\mathbb{R}^n$, 结构群 $G = O(n), SO(n), U(n/2)$ 等等的向量丛 ξ,

$$\xi : E \xrightarrow{p} B, \quad F = \mathbb{R}^n.$$

考虑纤维中所有长度 $\leqslant 1$ 的向量. 它们的集合构成了纤维丛 $\widetilde{E} \to B$, 纤维 $F' = D^n \subset \mathbb{R}^n$. 边缘 $\partial \widetilde{E}$ 为以 S^{n-1} 为纤维的丛.

定义 2 从 ξ 的托姆复形是指商复形

$$M(\xi)=\widetilde{E}/\partial\widetilde{E},$$

在这里的 $\partial\widetilde{E}$ 收缩为一点.

引理 4 存在自然的同构

$$\begin{aligned}\varphi:\ &H_i(B)\to H_{n+i}(M(\xi)),\\ &H^i(B)\to H^{n+i}(M(\xi)),\end{aligned}$$

其中 $i\geqslant 0$ 为任意, $n=\dim F$. 如果 $G=O(n)$, 则此同构对 mod 2 同调成立; 如果 $G=SO(n)$, 则对在 $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{Z}_p$ 上都成立.(同构 φ 从直观上是显见的: 对底空间 B 上任一闭链 z, 定义闭链 $\varphi(z)$ 为原像 $\varphi(z)=p^{-1}(z)\bmod\partial\widetilde{E}$.)

引理 4 的证明已经在 §17 中给出 (参看在临界流形情形中对于莫尔斯不等式有效性的引理 2). 我们记得, 同构 φ 是两个庞加莱对偶的复合:

$$\varphi=D_{\widetilde{E}}D_B,$$

其中

$$\begin{aligned}&D_B:H_q(B)\to H^{m-q}(B),m=\dim B,\\ &D_{\widetilde{E}}:H^{m-q}(\widetilde{E})\to H_{m+n-(m-q)}(\widetilde{E},\partial\widetilde{E})\\ &\qquad\quad\ \big\|\qquad\qquad\qquad\qquad\big\|\\ &\qquad\ H^{m-q}(B)\qquad\qquad\ H_{q+n}(M(\xi))\end{aligned}$$

(我们注意到, $\widetilde{E}$ 具有 B 的同伦型, 并且 $H^q(M(\xi))=H^q(\widetilde{E},\partial\widetilde{E}),q>0$.)

在托姆复形 $M(\xi)$ 的上同调群中有一个 "基本类"$\varphi(1)\in H^n(M(\xi))$. 另外, 底 $B\subset M(\xi)$ 可以作为纤维丛 ξ 的零截影嵌入在复形 $M(\xi)$ 中. 这个 B 在 $M(\xi)$ 中的法丛恰好是 ξ, 而补空间 $M(\xi)\backslash B$ 可收缩为一个点 $\{*\}\in M(\xi)$.

作为托姆复形的第一个应用是建立底空间 B 上任意向量丛 ξ 的斯蒂弗尔 - 惠特尼类 $w_i\in H^i(B,\mathbb{Z}_2)$ 与斯廷罗德平方算子 Sq^i 之间的关联.

定义 3 称元素 $\varphi^{-1}Sq^i\varphi(1)$ 为类 $w_i\in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$, 其中 (见引理 4)

$$\varphi:H^q(B,\mathbb{Z}_2)\to H^{n+q}(M(\xi);\mathbb{Z}_2).$$

为了建立这个定义与早先给出的斯蒂弗尔 - 惠特尼类的关系, 应该进行在分类空间的上同调群 $H^*(BSO(n);\mathbb{Z}_2)$ 和 $H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2)$ 中的一些计算. 在群

$O(n)$ 中存在对角型矩阵的子群 $D(n) \subset O(n)$, 它具有形状

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix},$$

$D(n) = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$. 于是存在分类空间之间的映射

$$BD(n) = \mathbb{R}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{R}P^\infty \xrightarrow{i} BO(n)$$

从而有上同调群的同态

$$i^* : H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \to H^*(BD(n); \mathbb{Z}_2).$$

习题 2 类似于群 $U(n)$ 的情形, 证明: 像 $\mathrm{Im}\ i^*$ 正好等于 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称多项式, 其中 $0 \neq x_i \in H^1(\mathbb{R}P_i^\infty; \mathbb{Z}_2)$. 这时 i^* 的核为零 (单射).

斯蒂弗尔 – 惠特尼类由初等对称多项式

$$i^*(w_q) = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} x_{i_1} \cdots x_{i_q}$$

得到.

习题 3 证明映射 $j : BSO(n) \to BO(n)$ 诱导的在 $\mathbb{Z}_2$ 上同调间的映射 j^* 为满 (即 "映上"), 并且其核由元 $w_1 \in H^1(BO(n); \mathbb{Z}_2)$ 生成的理想.

习题 4 考虑在 $BO(n)$ 上的万有丛 ξ 的托姆复形 $M(\xi)$ 以及嵌入 $f : BO(n) \subset M(\xi)$. 证明映射

$$f^* : H^*(M(\xi); \mathbb{Z}_2) \to H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$$

的核为零, 并且像 $\mathrm{Im}\ f^*$ 由所有那些能被 $w_n \in H^n(BO(n); \mathbb{Z}_2)$ 除尽的斯蒂弗尔 – 惠特尼类 w_i 组成的多项式, 这里有 $i^* w_n = x_1 \cdots x_n$. 证明: $f^*\varphi(1) = w_n, f^*\varphi(w_i) = Sq^i(w_n) = w_i w_n$. 一般地, 有公式

$$f^*\varphi(x) = x w_n$$

(请证明!).

请得出对 $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2)$ 的相似结果, 并计算在 $H^*(M(\xi); \mathbb{Z}_2)$ 的运算 Sq^i, 这类似于 §10. 利用 §10 的结果研究同伦群

$$\pi_{n+j}(M(\xi)), j < n - 1.$$

习题 5　由公式 $w_i = \varphi^{-1} Sq^i \varphi(1)$ 出发, 证明类 $w_j \in H^j(M^n; \mathbb{Z}_2)$ 对于闭流形而言为同伦不变的. 为此要利用切丛与 $M^n \times M^n$ 中对角线邻域之间的关系.

习题 6　类 w_1 为零当且仅当该流形为定向, 且成立

$$Dw_1 = \delta_*[M^n], \quad \delta_*: H_n(M^n; \mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z}_2),$$

δ_* 是在 §3 中所给出的那个上同调中的算子. 不要用习题 5 去证此公式.

对于底空间 $B = BG, G = O(n), SO(n), U(n/2), SU(n/2), Sp(n/4)$ 和纤维为 $\mathbb{R}^n$ 的万有丛 ξ 而言, 其托姆复形 $M(\xi)$ 通常以 $MO(n), MSO(n), MU(n/2), MSU(n/2), MSp(n/4)$ 表示.

如果 $G = e$ (单位群), 则其万有丛 ξ 平凡, 底空间 $BG = \{*\}$ 为单点, 纤维为 $\mathbb{R}^n$. 我们有

$$Me = S^n.$$

特别, $SO(1) = e$, 从而 $MSO(1) = S^1$; 另外, $O(1) = \{\pm 1\}, BO(1) = \mathbb{R}P^\infty$ (或者对充分大 N 的 $\mathbb{R}P^N$). 具群 $O(1)$ 的万有丛 η 具有 $\mathbb{R}P^N$ 在 $\mathbb{R}P^{N+1}$ 中法丛的形状:

$$E \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^N, \text{ 纤维 } F = \mathbb{R}^1.$$

丛的空间 $\widetilde{E}$ 的纤维为 $D^1 = I$ (长度 $\leqslant 1$ 的向量), $\widetilde{E}$ 是个默比乌斯带 (参看 [1], 卷 II, §2). 边缘为球面 S^N, 是 $\mathbb{R}P^N$ 的覆叠空间. 因此托姆空间 $M(\eta)$ 有形状

$$M(\eta) = MO(1) = \frac{\widetilde{E}}{\partial \widetilde{E}} = \mathbb{R}P^{N+1} \supset \mathbb{R}P^N = B,$$

对于群 $G = SO(2)$ 我们类似地有

$$\begin{array}{l} MSO(2) = \mathbb{C}P^{N+1} \supset \mathbb{C}P^N = B, N \to \infty \\ \quad \Vert \\ MU(1) \end{array}$$

在这些情形中的基本类是群的基元:

$$u = \varphi(1) \in H^1(S^1, \mathbb{Z}) \quad \text{对} MSO(1) = S^1;$$
$$u = \varphi(1) \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \quad \text{对} MO(1) = \mathbb{R}P^\infty;$$
$$u = \varphi(1) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \quad \text{对} MSO(2) = \mathbb{C}P^\infty.$$

这些空间是 $K(\pi, n)$ 型复形, 其中 $n = 1, 2, \pi = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$; 元素 $u = \varphi(1)$ 与复形 $K(\pi, n)$ 的基本元相同: 参看 §10.

有下面简单的论断.

引理 5 托姆复形 $M(\xi)$ 当 $n>1$ 时为单连通. 它最简单的同伦群为

$$\pi_j(M(\xi))=0, \quad 1\leqslant j<n;$$
$$\pi_n(M(\xi))=\begin{cases}\mathbb{Z}_2, \text{非定向丛}, \\ \mathbb{Z}, \text{定向丛}.\end{cases}$$

证明 由底空间 B 的胞腔剖分乘上一个胞腔 (纤维) 得到 $M(\xi)$ 的胞腔剖分

$$B\subset\sigma^j\mapsto\varphi(\sigma^j)=p^{-1}(\sigma^j)=\sigma^{n+j}.$$

除此之外, 还存在一个零维胞腔 $\sigma^0\subset M(\xi)$, 它是由 $\partial\widetilde{E}$ 收缩成的那个点得到的. 因为 $\pi_j(M(\xi))=0, j<n$ (在这些维数没有胞腔). 设 B 只有一个零维胞腔 (对于连通的 B, 像在 §4 所证的那样总可以化成这种情形); 于是在 $M(\xi)$ 中总存在一个 n 维的胞腔 (即在此点上的纤维). 因此群 $\pi_n(M(\xi))$ 是循环的. 在非定向丛的情形, 在底空间中存在一个闭道 (可以假定它是一个胞腔 σ^1), 沿着它翻转了纤维的定向. 对这样的胞腔 σ^1, 其原像 $p^{-1}(\sigma^1)=\varphi(\sigma^1)=\sigma^{n+1}$ 是 $M(\xi)$ 中那种胞腔, 使得

$$\partial\sigma^{n+1}=2\sigma^n.$$

对 S^1 上的纤维丛, 从几何上看这是很显然的. 如果丛是定向的, 则所有胞腔 $p^{-1}(\sigma_j^1)$ 的边缘在复形 $M(\xi)$ 中等于零. 因此闭链 $[\sigma^n]$ 为无穷阶的. 因为 $H_n(M(\xi))=\pi_n(M(\xi))$, 引理得证. □

成立下面的重要定理.

定理 1 配边群 $\Omega_i^O, \Omega_i^{SO}$ 典则地同构于稳定同伦群

$$\pi_{n+i}(MO(n))\simeq\Omega_i^O, \quad \pi_{n+i}(MSO(n))\simeq\Omega_i^{SO},$$

其中 $i<n-1$ (参看 [1], 卷 II, §23, 在那里建立了群 $\pi_{n+i}(S^n)=\pi_{n+i}(Me)$ 和标架流形之间的关系).

证明 a) 考虑闭流形 $M^i\subset\mathbb{R}^{n+i}, i<n-1$. 所有的嵌入 $M^i\subset\mathbb{R}^{n+i}$ 都是同痕的 (参看 [1], 卷 II, §11), 并且 M^i 在 $\mathbb{R}^{n+i}$ 中的法丛与嵌入无关. 以 ν 记其法丛. 存在到万有丛的映射

$$M^i\to BO(n)$$
$$\nu\to\xi,$$

其中的 ξ 为万有丛, 其纤维为 $\mathbb{R}^n$. 从 ν 的空间是 M^i 在 $\mathbb{R}^{n+i}\subset S^{n+i}$ 中的邻域, 而且它的像覆盖了整个 $\widetilde{E}$. 把这个映射延拓到该邻域的全部补空间上, 使得

这个补空间变到了单个的胞腔 $\sigma^0 \in M(\xi)$, 即那个由收缩 $\partial\widetilde{E}$ 得到的零维胞腔. 我们便得到了球面的映射

$$f : S^{n+i} \to M(\xi).$$

这个映射与子流形**横截正则**, 并且 $f^{-1}(BO(n)) = M^i$. 这里所说的沿子流形 $BO(n) \subset M(\xi)$ 横截正则的概念是这样的: 在任意点 $x \in f^{-1}(BO(n))$, 切空间 $\mathbb{R}^{n+i}_x$ 在线性映射 df 下的像横截于子流形 $BO(n) \subset M(\xi)$ 的切平面, 即线性空间 $df(\mathbb{R}^{n+i}_x)$ 和 $\tau_{f(x)}(BO(n))$ 一起生成了 $M(\xi)$ 在点 $f(x)$ 的切空间 (参看 [1], 卷 II, §10).

配边胞腔 W^{i+1} 有 $\partial W^{i+1} = M_1^i \bigcup M_2^i$; 我们假定在乘积 $\mathbb{R}^{n+i} \times I, I = [0,1]$ 有 $M_1^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \times 0, M_2^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \times 1$, 而 W^{i+1} 垂直地趋向其边缘. 对于 $W^{i+1} \subset \mathbb{R}^{n+i} \times I$ 的法丛 ν 重复前面的构造, 我们便得到了同伦

$$S^{n+i} \times I \to M(\xi).$$

因此, 建立了对应 (同态)

$$\Omega_i^O \to \pi_{n+i}(MO(n)), \quad i < n-1.$$

类似地, 可建立同态

$$\Omega_i^{SO} \to \pi_{n+i}(MSO(n)), \quad i < n-1.$$

b) 我们来证明上面所构造的同态是个同构. 设给出元 $a \in \pi_{n+i}(MO(n))$, 它由映射

$$f : S^{n+i} \to MO(n)$$

代表.

可以假定, 在进行小的扰动后 (参看 [1], 卷 II, §10) 映射 f 沿子流形 $BO(n) \subset MO(n)$ 横截正则. 原像 $f^{-1}(BO(n)) = M^i$ 为光滑子流形 $M^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \subset S^{n+i}$. M^i 在 $\mathbb{R}^{n+i}$ 中的 n 维法平面在映射 df 下的像于是与 $BO(n)$ 横截. 经过对该映射的初等形变, 这个像沿着整个 $BO(n)$ 可以做到与 $BO(n)$ 正交, 而流形 M^i 在 S^{n+i} 中的整个补空间则可以收缩到点 σ^0, 即在 $MO(n)$ 中的 $\partial\widetilde{E}$ 得出的那个点. 于是得到了对 Ω_i^O 的定理 1 的证明. 对 Ω_i^{SO} 的证明是类似的. 定理证完.□

定理 2 a) 闭链 $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z}_2)$ 可以实现为闭子流形 $M^i \subset M^{n+i}$ 当且仅当存在映射 $f : M^{n+i} \to MO(n)$ 使得 $f^*u = Dx$, 其中 $u \in H^n(MO(n), \mathbb{Z}_2)$ 为基本类, 而 D 为庞加莱对偶算子.

b) 设 M^{n+i} 为定向流形. 闭链 $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z})$ 可以实现为定向闭子流形 $M^i \subset M^{n+i}$ 当且仅当存在映射 $f : M^{n+i} \to MSO(n)$ 使得 $f^*u = Dx$.

c) 闭链 $x \in H_i$ 可以实现为闭的定向子流形 $M_i \subset M^{n+i}$, 并且其法丛为平凡 (即由 M^{n+i} 中的非异方程组 $\psi_1 = 0, \cdots, \psi_n = 0$ 给出) 当且仅当存在映射 $f: M^{n+i} \to Me = S^n$, 使得 $f^*u = Dx$.

注 对于将闭链实现为子流形, 并使得此子流形的法丛具有给定的结构群 $U(n/2), SU(n/2), Sp(n/4)$ 等等存在类似的定理. 流形 M^{n+i} 到 $MU(n/2)$, $MSU(n/2), MSp(n/4)$ 等等的映射给出了这样的实现.

群 $\pi_{n+i}(MU(n/2)) = \Omega_i^U, \pi_{n+i}(MSU(n/2)) = \Omega_i^{SU}, \pi_{n+i}(MSp(n/4)) = \Omega_i^{Sp}$ 可以自然地理解为复 (酉) 的, 特殊复的, 或四元数的配边群 $\Omega^U, \Omega^{SU}, \Omega^{Sp}$. 特别重要的是酉配边群. 每个复的和拟复的流形都在群 Ω_{2i}^U 中有一个配边类.

对 $G = O(n)$ 时定理 2 的证明 设给出了子流形 $M^i \subset M^{n+i}$. 它的法丛按前面所讲过的构造方法定义了映射 $f: M^{n+i} \to MO(n)$, 和 $M^i \to BO(n)$; 流形 M^i 在 M^{n+i} 的一个邻域的整个补集变到了点 σ^0, 它是由收缩 $\partial\widetilde{E}$ 得到的 $M(\xi)$ 中的点. 容易看出,

$$f^*u = D[M^i].$$

反过来, 如果给出了沿 $BO(n) \subset MO(n)$ 横截正则的映射 $f: M^{n+i} \to MO(n)$, 则原像 $M^i = f^{-1}(BO(n))$ 满足 $f^*u = D[M^i]$. 对于 $G = SO(n)$ 等的讨论是相似的. 定理证完. □

在某些情形, 复形 $MO(i), MSO(i)$ 是 $K(\pi, n)$ 型的复形. 这些情形是:

$$MSO(1) = Me = S^1 = K(\mathbb{Z}, 1), \quad \pi_j = 0, j > 1;$$
$$MO(1) = \mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1), \quad \pi_j = 0, j > 1;$$
$$MSO(2) = \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2), \quad \pi_j = 0, j \neq 2.$$

于是, 在这三种情形中[1)]元素 $\varphi(1) = u \in H^n(MG)$ 与复形 $K(\pi, n)$ 的基本类相同. 利用 §10 的定理我们得到了定理 2 的一组推论.

推论 1 a) 对每个 n, 任意闭链 $x \in H_n(M^{n+1}; \mathbb{Z}_2)$ 都可以由闭子流形实现.

b) 对每个 n, 任意闭链 $x \in H_n(M^{n+1}; \mathbb{Z}_2)$ 和 $x \in H_n(M^{n+2}; \mathbb{Z})$ 都可以由闭的定向子流形实现.

因为 $MO(1), MSO(1), MSO(2)$ 都是复形 $K(\pi, n)$, 那么根据 $K(\pi, n)$ 的基本性质知道, 此推论的结论可由引理 2 化为论断: 上闭链 $Dx = y$ 在所有这些情形中可以由像 f^*u 表示.

[1)] 更复杂的定理 (托姆) 断言, 所有维数直到 $2n-1$ 前的复形 $MO(n)$ 同伦等价于 $K(\mathbb{Z}_2, m_j), m_j \geqslant n$ 型的复形的直积.

推论 2 如果 $i<\frac{n}{2}$, 则对任意闭链 $x\in H_i(M^n,\mathbb{Z})$ 存在数 $\lambda\neq 0$ 使得闭链 λx 由子流形 $M^i\subset M^{n+i}$ 表示.

这个推论是由定理 2 及利用 §10 的结果提取出来的: 从那里已知, 在稳定维数处任意复形 (在这里是 $MSO(n)$)"其结构同于 $K(\pi,m),m\geqslant n$, 型的复形的乘积, 这里所涉及到的同调和同伦的张量积都是在域 $\mathbb{Q}$ 上的."

推论 3 对任意闭链 $x\in H_i(M^n;\mathbb{Z})$ 存在数 $\lambda\neq 0$ 使得闭链 λx 为流形 M^i 的像:

$$\varphi: M^i\to X,$$
$$\varphi_*[M^i]=x.$$

其证明在于用嵌入 $X\subset\mathbb{R}^{N+i}$ 以及考虑带边流形 $U\supset X$, 它收缩到 $X: U\sim X$. 这时闭链 $\lambda x\in H_i(U)\simeq H_i(X)$ 可根据推论 2, 以映射 $(U,\partial U)\xrightarrow{f} MSO(N)$ 作为子流形而实现, 这里的 ∂U 变到了点, 而 $f^*\varphi(1)=D[M^i]$.

推论 4 下配边群到同调群的自然同态

$$\Omega_i^{SO}(X,Y)\otimes\mathbb{Q}\to H_i(X,Y;\mathbb{Q})$$

为满映射 ("映上").

对于在同调群 $H_*(X,Y;\mathbb{Z})$ 中没有奇次挠元的复形我们有诺维可夫的定理, 它建立了不在 $\mathbb{Q}$ 上作张量积时的类似结果, 就是说闭链以没有重数的流形的像来实现.

我们现在转而讨论定理 1 和嘉当 - 塞尔定理 (§10) 的推论. 环 $H^*(BSO(n);\mathbb{Q})$ 由示性类生成, 并为一些元素 (庞特里亚金类和欧拉-庞加莱类) 的多项式环:

$$p_i\in H^{4i}(BSO(n);\mathbb{Q}),$$
$$\chi\in H^{2n}(BSO(2n);\mathbb{Q}).$$

于是对 $j<n$ 和 $j\neq 4k$ 我们有

$$H^{n+j}(MSO(n);\mathbb{Q})=0.$$

当 $4k<n$ 时, 稳定群

$$H^{4k}(BSO(n);\mathbb{Q})\overset{\varphi}{\approx}H^{n+4k}(MSO(n);\mathbb{Q})$$

的秩等于数 k 表示为 $k=m_1+\cdots+m_q$ 的这种不同分解的个数, 这是因为由单项式 $z=p_{m_1}p_{m_2}\cdots p_{m_q}$ (可以重复: $m_i=m_j$) 构成它的基; 这里 $\deg z=4(m_1+\cdots+m_q)$.

对于维数 $4k=4,8$ 的情形, 我们在前面已写出 (参看 I 小节) 了流形 $[\mathbb{C}P^2]\in\Omega_4^{SO}$ 和 $[\mathbb{C}P^2]^2,[\mathbb{C}P^4]\in\Omega_8^{SO}$ 的示性数.

由定理 1 和嘉当 – 塞尔定理得到

定理 3 对 $j\neq 4k$, 群 $\Omega_j^{SO}\otimes\mathbb{Q}=0$; $\Omega_{4k}^{SO}\otimes\mathbb{Q}$ 的秩等于最大的线性无关向量数, 即流形 M^{4k} 的示性类的个数. 对于 $4k=4,8$, 由上面的计算知道, 在 $\mathbb{Q}$–上同调中的示性类组在相差一个挠元的程度 [1] 上完全决定了配边类 $x\in\Omega_{4k}^{SO}$.

习题 7 计算乘积空间 $\mathbb{C}P_1^{2n_1}\times\cdots\times\mathbb{C}P_k^{2n_k}$ 的示性数向量, 并证明所有这些向量线性无关.

推论 符号差 $\tau(M^{4k})$ 是示性数向量的线性形式.

证明 我们知道, 由引理 3, τ 是 $\Omega_{4k}^{SO}\otimes\mathbb{Q}$ 上的线性形式 (参看前面有关内容), 同时因为示性数给出了全部形式的基. 推论得证. □

对于 $4k=4,8$ 我们有:

$$k=1:p_1[\mathbb{C}P^2]=3,\quad \tau(\mathbb{C}P^2)=1;\quad \Omega_4^{SO}\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q}.$$

结论

$$\tau=\frac{1}{3}p_1. \tag{1}$$

对于 $k=2$, 我们已经得到过表格:

	$[\mathbb{C}P^2]\times[\mathbb{C}P^2]$	$\mathbb{C}P^4$
p_1^2	18	25
p_2	9	10
τ	1	1

结论 成立公式

$$\tau=\frac{1}{45}(7p_2-p_1^2). \tag{2}$$

以一种方便的分析形式可以得到对所有 k 的一般公式 (Hirzebruch).

提出一个更广泛的合理的问题: 在配边群 $\Omega_*^G=\sum\Omega_i^G$ 上给出了一个任意的数值示性类:

$$\mathbb{B}:\Omega_*^G\to\mathbb{C}$$

其中 $G=U,SO$, 使得 $\mathbb{B}(1)=1,\mathbb{B}(M_1^n\bigcup M_2^n)=\mathbb{B}(M_1^n)+\mathbb{B}(M_2^n),\mathbb{B}(M_1^n\times M_2^n)=\mathbb{B}(M_1^n)\mathbb{B}(M_2^n)$. 即可加性和 (相对于流形直积的) 可积性. 实际上, 我们只对环 $\Omega_*^G\otimes\mathbb{Q}$ 感兴趣, 它被特征数, 即 c_i 或 p_i 的多项式决定. 对任意偶维时的 $G=U$

[1] 关于环 Ω^{SO},Ω^U 的完整知识读者可在综述文章 [60] 中找到.

情形, 我们有多项式 $\mathbb{B}_k(c_1,\cdots,c_k)$ 使得 $\mathbb{B}[M^{2k}]=(\mathbb{B}_k(c_1,\cdots,c_k),[M^{2k}])$, 其中 M^{2k} 是 "酉" 流形 (即在此流形的嵌入 $M^{2k}\subset\mathbb{R}^{2N+2k}$ 的稳定法从上引进了 U-从结构; 特别是那种由示性类所 "记住" 的流形的复 (或拟复) 结构的弱映射得到的 U 结构). 对于 $G=SO$, 我们有多项式 $\mathbb{B}_k(p_1,\cdots,p_k)$ 其中维数 $n=4k$ 为任意, 使得

$$\mathbb{B}[M^{4k}]=(\mathbb{B}_k(p_1,\cdots,p_k),[M^{4k}]).$$

$G=SO$ 的情形可以化成 $G=U$, 但附加了条件 $\mathbb{B}_{2k+1}(c_1,\cdots,c_{2k+1})=0$; 我们将在以后给出它.

多项式序列 $\mathbb{B}_0=1,\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2,\cdots,\mathbb{B}_k,\cdots$ 并不是任意的, 它们被可乘性的要求紧紧联系在一起: $\mathbb{B}(M^{2k}\times M^{2k})=\mathbb{B}(M^{2k})\mathbb{B}(M^{2k})$.

我们将以下面的形式来找出答案: 设给出了形式级数

$$\mathbb{B}(zt)=1+a_1zt+a_2z^2t^2+\cdots=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{B}_k(\eta)z^k,$$

其中 $t\in H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$,

其数值系数定义了一维 U- 从的示性类 $\mathbb{B}$. 令

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_k(c_1,\cdots,c_k)&=\left[\prod_{i=1}^n\mathbb{B}(zt_1)\mathbb{B}(zt_2)\cdots\mathbb{B}(zt_n)\right]_k\\&=\mathbb{B}_k(\sigma_1,\cdots,\sigma_k),\end{aligned}$$

其中 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 为 $t_1,\cdots,t_n$ 的初等对称多项式.

对 $G=SO$ 的情形, 级数 $\mathbb{B}(zt)$ 应取形式 $\mathbb{B}(zt)=P(z^2t^2)$, 庞特里亚金类 p_k 具有的形状为 $p_k\leftrightarrow\sigma_k(t_1^2,\cdots,t_n^2)$; 参看前面的相关内容.

根据柯西公式, 我们可以写成

$$\mathbb{B}_k(c_1,\cdots,c_k)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\varepsilon}\prod_{i=1}^n\mathbb{B}(zt_1)\cdots\mathbb{B}(zt_n)\frac{dz}{z^{k+1}}\quad(n\geqslant k).$$

对于 $\mathbb{C}P^n$, 按照切从示性类的公式, 我们有

$$\begin{aligned}&t_1=t_2=\cdots=t_{n+1}=t\in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})\\&\tau_{\mathbb{C}P^n}\oplus 1=\eta\oplus\cdots\oplus\eta,\quad(n+1)\text{项},\\&\mathbb{B}(\eta)=\Sigma\mathbb{B}_k(\eta)z^k,\quad\mathbb{B}(\tau_{\mathbb{C}P^n})=\mathbb{B}(\eta)^{n+1}.\end{aligned}$$

对于数 $\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n]$ 则有

$$\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n]=[\mathbb{B}(\eta)^{n+1}]_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\varepsilon}\mathbb{B}(z)^{n+1}\frac{dz}{z^{n+1}}$$

(z 级数的第 n 个分量)

例 4 $\mathbb{B}[\mathbb{C}P^{2n}] = 1, \mathbb{B}[\mathbb{C}P^{2n+1}] = 0$; 在这里的 $\mathbb{B}(zt) = \dfrac{zt}{\mathrm{th}(zt)}$. 这时 $\mathbb{B}$ 与符号差 τ 相等:

$$\mathbb{B} = \tau, \quad \mathbb{B}_k = L_k(p_1, \cdots, p_k).$$

这给出了希策布鲁赫多项式的一般公式:

$$\tau = (L_k(p_1, \cdots, p_k), [M^{4k}]).$$

例 5 $\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n) = 1, n$ 任意. 这时有

$$\mathbb{B}(zt) = \frac{zt}{1 - \exp(-zt)}.$$

这是被称作代数 (复) 流形的 "Todd 亏格", 记为 $T[M^{2n}]$: 根据希策布鲁赫定理, $T[M^{2n}] = \sum(-1)^i r_i$, 其中的 r_i 是流形 M^{2n} 上的全纯微分 $i-$ 形式的空间的维数.

$$T_0 = 1, T_1 = \frac{1}{2}c_1, T_2 = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2), T_3 = \frac{1}{24}c_1 c_2.$$

我们来对任意示性数 $\mathbb{B} : \Omega_*^U \to \mathbb{C}$ 推导出一般公式. 引进形式幂级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0}[\mathbb{C}P^n]z^n$ 和它的 "积分" $g(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1} z^{n+1}$. 我们对此级数给一个示性数 $\mathbb{B}$ 的值:

$$(g\mathbb{B})(z) = \sum \frac{\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n]}{n+1} z^{n+1}.$$

我们有

$$\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n] = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=\varepsilon} \frac{\mathbb{B}^{n+1}(t)}{t^{n+1}} dt,$$

$$\begin{aligned}\frac{d(g\mathbb{B})(z)}{dz} &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{B}[\mathbb{C}P^n]z^n = \frac{1}{2\pi i z} \sum_{n\geqslant 0} \oint\limits_{|w|=\varepsilon} \left(\frac{\mathbb{B}(w)}{w} z\right)^{n+1} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w|=\varepsilon} \frac{\mathbb{B}(w)/w}{1 - z\mathbb{B}(w)/w} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w|=\varepsilon} \frac{dw}{(w/\mathbb{B}(w)) - z}, \left|\frac{z\mathbb{B}(w)}{w}\right| < 1.\end{aligned}$$

故而

$$(g\mathbb{B})(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^z \oint\limits_{|w|=\varepsilon} \frac{dw dv}{(w/\mathbb{B}(w)) - v}, |z| < \left|\frac{w}{\mathbb{B}(w)}\right|.$$

对 v 积分, 因为这个积分定义了反函数, 故得到

$$(g\mathbb{B})(z) = \left(\frac{z}{\mathbb{B}(z)}\right)^{-1}$$

因此我们得到了一般性的结果 (诺维可夫):

$$\mathbb{B}(z) = \frac{z}{g^{-1}(z)}, \tag{3}$$

其中

$$(g\mathbb{B})(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n]}{n+1} z^{n+1}.$$

Ⅲ. 符号差公式的一些应用. 符号差与类的不变性问题

我们要指出在 $\mathbb{Q}$ 上同调中的示性类 p_k 可以根据符号差的概念进行定义.

考虑闭链 $x \in H_{4k}(M^n)$ 并只通过符号差计算内积 (p_k, x). 不妨设 $4k < \frac{n}{2} - 1$ (如果不满足, 则转而考虑 $M^n \times S^N$). 上闭链 $y = D(x) \in H^{n-4k}(M^n)$ 在乘以 $\lambda \neq 0$ 时可以实现为映射

$$f : M^n \to S^{n-4k} = Me,$$
$$f^*(u) = \lambda y$$

的像. 这可以由 Ⅱ 中的结果得到. 正则点 $x_0 \in S^{n-4k}$ 的原像 $f^{-1}(x_0)$ 为具有平凡法丛的子流形

$$i : M^{4k} \times \mathbb{R}^{n-4k} \subset M^n,$$

其中 $i_*[M^{4k}] = \lambda x \in H_{4k}(M^n)$.

对于 $k = 1$, 我们根据公式 (1) 和 $M^{4k} \subset M^n$ 法丛的平凡性, 令

$$(p_1, x) = \frac{1}{\lambda}(p_1, \lambda x) = \frac{1}{\lambda} 3\tau(M^{4k}).$$

这给出了庞加莱类 p_1 的一个新定义. 类似地, 对类 p_2, 由 (2) 我们有:

$$(p_2, x) = \frac{1}{\lambda}(p_2, \lambda x) = \frac{1}{7\lambda}(45\tau(M^{4k-1})(p_1^2, \lambda x)).$$

由一般性的 Hirzebruch 公式可得出: 对任意 k, 类 p_k 能够用 $\tau(M^{4k})$ 及更小维数的此种类的乘积表达. 这给出了类 p_k 的新的定义."符号差型" 的定义使我们能容易证明在逐段线性 (逐段光滑)(其概念见后面) 同胚下有理类 p_k 的不变性, 它在证明对连续同胚下类 p_k 的不变性中起了重要的作用. 可以看出, 符号差的定义实质上是有理的: 在其中包含了 "不可缺少" 的分母, 譬如类 p_2 中的 $\frac{1}{7}$. 这个结果在于, 按定义为微分同胚不变数值类 $p_k \in H^{4k}(M^n; \mathbb{Z})$ 可能有有限阶的元;7- 挠类 p_2 原来对于连续同胚映射不是不变的.

我们考虑逐段线性 (可三角剖分的) 流形 M^n 和它的到球面的单纯映射: $M^n \xrightarrow{f} S^{n-4k}$. 于是单形 $\sigma^{n-4k} \subset S^{n-4k}$ 内部的原像有形状 (请验证!)

$$\sigma^{n-4k} \times p^{-1}(y_0) = f^{-1}(\sigma^{n-4k}) = \sigma^{n-4k} \times M^{4k} \subset M^n,$$
$$y_0 \in \sigma^{n-4k},$$

其中 M^{4k} 也是可剖分流形或至少是个复形, 使得对任意点 $x_0 \in M^{4k}$ 我们有 "局部同调球面"

$$\begin{aligned} &H_i(M^{4k}, M^{4k}\backslash\{x_0\}) = 0, \quad i \neq 4k, \\ &H_{4k}(M^{4k}, M^{4k}\backslash\{x_0\}) = \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

习题 8 证明对同调流形 (4) 成立同调的庞加莱对偶, 它由具通常性质的符号差 $\tau(M^{4k})$ 定义: 如果 $M^{4k} = \partial W^{4k+1}$, 其中 M^{4k} 和 ∂W^{4k+1} 为同调流形, 则 $\tau = 0$.

这些性质可以完全根据符号差给出类 $p_k \in H^*(M;\mathbb{Q})$ 的单纯的 (和组合不变的) 定义 (托姆, 罗赫林 – 史瓦尔泽 (Švarc)). 而类 $p_2 \in H^8(M;\mathbb{Z})$ 则不能够组合地定义, 也不是组合的 (拓扑的) 不变量 (米尔诺 (Milnor), 凯尔维尔 (Kervaire)).

转向讨论类 $p_k \in H^{4k}(M;\mathbb{Q})$ 的拓扑不变问题, 不失一般性, 可设所有流形 $M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}$ 是单连通的. 设 $n \geqslant 2$. 考虑环面 $T^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^n$ 的嵌入以及在所讨论流形中的开区域

$$M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \subset M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}.$$

在任何开结构中, 区域

$$M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \subset M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+k}$$

都是个光滑流形. 利用可扩张为具自由阿贝尔基本群 $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ 的光滑单连通流形的十分复杂的分类理论. 可以证明如下论断 (最简单的一种): 如果 $\pi_1(M^{4k}) = 0$, 则在开光滑流形 $M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ (给予了任一种光滑结构) 上的光滑万有覆叠微分同胚于 $\widetilde{M}^{4k} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R}^1$, 其中 $\widetilde{M}^{4k}$ 为光滑流形. 由此对 k 进行归纳便得出论断说, 数 $\tau(M^{4k}) = \tau(\widetilde{M}^{4k})$ 以拓扑不变的方式定义了示性类 $p_1, \cdots, p_k$ (诺维可夫). 至今还不知道有任何不用这种人为制造的区域来证明这个定理的, 其中的这个区域在我们这个 "纯粹单连通" 问题中具有自由自阿贝尔群 π_1, 但问题的提出却与 π_1 无关.

我们注意到, 类 $p_1 \in H^4(M^k;\mathbb{Q})$ 不像同调和斯蒂弗尔 – 惠特尼类那样, 它不是同伦不变的 (道尔德 (Dold)) 考虑在球面 S^4 上的丛 ξ, 其纤维为 S^{n-1} (假设 $n = 4$ 时 $\chi = 0$), 结构群 $G = SO(n)$, 及所有可能的类 $p_1(\xi) \in H^4(S^4, \mathbb{Z})$. 这个丛的空间 $E \to S^4(F = S^{n-1})$ 具有胞腔 $\sigma^0, \sigma^4, \sigma^{n-1}, \sigma^{n+3}$, 其中 $\partial\sigma^4 = \partial\sigma^{n-1} = 0, \partial\sigma^{n+3} \neq 0$. 因此 E 有形状

$$E = (S^4 \vee S^{n-1}) \bigcup_{\alpha} \sigma^{n+3},$$

其中 $\alpha \in \pi_{n+2}(S^4 \vee S^{n-1})$.

习题 9　证明元 α 有形状

$$\alpha = [a_4, a_{n-1}] + b,$$

其中 $b \in \pi_{n+2}(S^{n-1})$, [,] 表示怀特黑德 (Whitehead) 积 (参看 [1], 卷 II, §22), $a_4 \in \pi_4(S^4), a_{n-1} \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$ 为生成元. 如果 $n=5$, 则 $b \in \pi_7(S^4) = \mathbb{Z} \oplus$ (挠群) 并在其中的有限部分.

另外, 我们从 §10 知道 (嘉当 - 塞尔定理的推论), 当 $n \neq 5$ 时群 $\pi_{n+2}(S^{n-1})$ 为有限群 (除此之外, 在 §10 中此群对 $n > 5$ 时已有计算, 在那里得到了 $\pi_{n+2}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}_{24}$). 因此, 最多只存在有限个不同同伦型的闭流形 E (当 $n \geqslant 5$ 时不大于 24). 这些流形的维数 $\geqslant 6$. 至于涉及微分同胚, 因为 $p_1(E) = p^*p_1(\xi)$ (请验证!), 故类 $p_1(\xi)$ 为流形 E 的不变量.

因此, 类 p_1 对于维数 $\geqslant 6$ 的流形不是同伦不变的. 对于流形 M^4, 这个类由公式 (见前面)

$$p_1 = 3\tau(M^4)$$

知是同伦不变的.

考虑 $n=5$ 的情形. 由 II 的推论 1 每个基闭链 $x \in H_4(M^5;\mathbb{Z})$ 可以被表示为定句子流形, 局部地它把定向流形 M^5 分为两部分 (整体上则不然). 考虑 "极小" 覆叠

$$p: \widehat{M^5} \to M^5$$

使得 $(p_*\pi_1(\widehat{M^5}), Dx) = 0$, 并且此等式同伦不变地决定了这个覆叠. 从几何上看, 这个覆叠是这样构造的: 流形 M^5 沿 M^4 被切开; 得到了胞腔 W^5 使得

$$\partial W^5 = M^4 \bigcup M^4$$

(边缘的两个分支). 按下面方式得到这个覆叠 (参看图 118): 取无穷多个 W^5, 并记其为 W_i^5. 又令

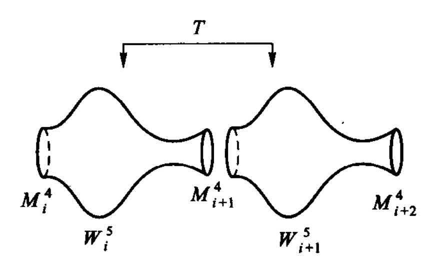


图 118

$$\widehat{M^5} = \cdots \bigcup W_1^5 \bigcup_{M_1^4} W_2^5 \bigcup_{M_2^4} W_3^5 \bigcup_{M_3^4} \cdots.$$

这个覆叠的单值化群等于 $\mathbb{Z}$, 并按如下那样作用:

$$T(W_i^5) = W_{i+1}^5,$$
$$T(W_i^4) = W_{i+1}^4, \quad \partial W_0^5 = M_0^4 \bigcup M_1^4.$$

以 i 表示嵌入 $M^4 \to \widehat{M}^5$. 我们有闭链 $\widehat{x} = i_*[M^4] \in H_4(\widehat{M}^5)$. 显然, 我们有 $T_*\widehat{x} = \widehat{x}$. 设 $a, b \in H^2(\widehat{M}^5; \mathbb{Q})$. 引入公式

$$\langle a, b\rangle_{\widehat{x}} = (ab, \widehat{x}).$$

引理 6 形式 $\langle a, b\rangle_{\widehat{x}}$只在某个有限维子空间 $A \subset H^2(\widehat{M}^5)$ 上取非零值; 这表明 $H^2(\widehat{M}^5) = A + B$, 并且对任意 $b \in H^2(\widehat{M}^5)$ 有 $\langle B, b\rangle_{\widehat{x}} = 0$.

证明 因为 $(ab, \widehat{x}) = ((i^*a)(i^*b), [M^4])$, 故立即由流形 M^4 的紧性 (因为它代表闭链 $\widehat{x}$) 得到证明. □

定义 4 称在有限维空间 A 上的形式 $\langle a, b\rangle_{\widehat{x}}$ 的符号差为**闭链 $\widehat{x}$ 的符号差** $\tau(\widehat{x})$.

定理 4 (诺维可夫) 成立公式

$$(p_1(M^5), x) = 3\tau(\widehat{x}).$$

证明 闭链 $M^4 \subset \widehat{M}^5$ 将 $\widehat{M}^5$ 分成两部分 $\widehat{M}^5 = M_1 \bigcup M_2$. 有两个嵌入: $i_1 : M^4 \to M_1, i_2 : M^4 \to M_2$. 闭链的符号差 $\tau(\widehat{x})$ 等于在 $H^2(M^4; \mathbb{Q})$ 上的这个形式限制在子空间 $\mathrm{Im}\ i^*$ 上的符号差, 这是因为如果 $i^*a = 0$ 或 $i^*b = 0$ 则有 $(ab, x) = 0$. 显然我们有

$$\mathrm{Im}\ i^* = \mathrm{Im}\ i_1^* \bigcap \mathrm{Im}\ i_2^*.$$

在同调群 $H_2(M^4; \mathbb{Q})$ 中有下面的子群:

$$\begin{aligned} L_0 &= \mathrm{Ker}\ i_*, \\ L_1 &= \mathrm{Ker}\ i_{1*} = L_0 + N_1, \\ L_2 &= \mathrm{Ker}\ i_{2*} = L_0 + N_2, \\ L_3 &= \mathrm{Im} i_* \subset H_2(\widehat{M}^5; \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

在子空间 L_1 和 L_2 上的相交数化为零 (在膜上同调于零的闭链有零相交). 所以在

$$H_2(M^4; \mathbb{Q}) = (L_0, N_1, N_2, L_3)$$

各子群的基下, 这个形式的矩阵形状 (分块) 为

$$\begin{array}{c} \\ L_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L_0 & N_1 & N_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & Q & Y \\ 0 & Q^* & 0 & Z \\ X^* & Y^* & Z^* & W \end{pmatrix} \end{array}.$$

其中 $W = W^*$. 这样的形式的符号差等于在子空间 L_3 上该形式的符号差 (即对应矩阵 W).

另外, 该形式在空间 $L_3 \subset H_2(M^4;\mathbb{Q})$ 上的符号差等于形式 $(ab,[M^4])$ 在子空间 $\operatorname{Im} i^*(H^2(\widehat{M}^5))$ 上的符号差, 从而等于符号差 $\tau(\widehat{x})$. 定理得证. □

推论 类 $p_1(M^5) \in H^4(M^5;\mathbb{Q})$ 同伦不变.

于是, 在非单连通闭子流形中, 有理示性类和基本群之间存在整体的关联, 对它的研究目前远没有完成. 最一般的 "关于高次符号差的猜想" 是说: 存在某个上同调类, 它与基本群 $\pi_1(M^n) = \pi$ 相关联; 这个类可作为像 $\operatorname{Im} j^*$ 得到, 其中 $j : M^n \to K(\pi, 1)$ 为典则的映射. 如果 $x \in H^{n-4k}(\pi,\mathbb{Q})$[1], 则可假定由庞特里亚金类构成的希策布鲁赫多项式与闭链 $Dj^*(x)$ 的内积为同伦不变, 即 $(L_k(p_1,\cdots,p_k), Dj^*(x))$ 同伦不变, 其中 D 为庞加莱对偶. 对自由阿贝尔群, 即 x 是一维类的乘积, 这个猜想已得到证明 (诺维可夫, 罗赫林, 卡斯帕罗夫, 项武忠, 法雷尔 (Farrell)). 当 π 是一个具负曲率的紧黎曼流形的基本群的情形也得到了证明 (Lusztig, Мищенко), 另外还有许多情形也得到证明, 这时或是用代数方式化到上面这两种情形之一, 或者与这两种情形相似 (卡佩尔 (Camell), 索罗维叶夫 (Соловьев)). 不可能有闭流形的其他来自有理 (实) 示性类 (即曲率张量) 的同伦不变量了.

§28. 七维球面的光滑结构. 光滑流形的 (法不变) 分类问题. 赖德迈斯特挠率和组合拓扑的基本假设

我们来研究无限可微的流形. 已知, k- 光滑类 $(k \geqslant 1)$ 的流形拓扑等价于 (并唯一地) 无限可微的实解析流形 (惠特尼). 可以形式地定义一个连续的流形, 其中从一个坐标图到另一个的坐标图的变换不是光滑的. 也可以考虑光滑流形之间的连续同胚 (经常遇到这种情形). 直到 50 年代前, 认为在连续流形上引进光滑流形的结构, 以及两个光滑流形间的连续同胚事实上是可微的, 这是很 "清楚的". 对 $n = 1$ 这是显然的, 对 $n = 2$ 时的证明也不难,对于三维流形则经极其艰难然而用的是直接而初等的方法建立了这个事实 (Moise).

前面所阐述的代数拓扑工具的一个令人吃惊的结果是在十分简单的流形中的一个发现: 这个流形连续同胚于通常的 7 维光滑球面 S^7, 但并不微分同胚于它 (米尔诺 (Milnor)). 正如将在后面看到的, 这个结果化成开流形时, 在此流形上不能引进任何可微流形的结构.

我们记得, 利用四元数 (参看 [1], 卷 II, §24) 我们构造了 "霍普夫四元数丛"

$$p : S^7 \to S^4,\ 纤维\ F = S^3.$$

[1] 在上同调代数中, 称复形 $K(\pi,1)$ 为 π 的上同调群, 记为 $H^*(\pi,\mathbb{Q})$.

这是个结构群为 $S^3 = SU(2)$ 的主丛, 这个群由满足 $|q| = 1$ 的四元数构成, 在球面上的作用为

$$S^7 = \{(q_1, q_2), |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}, (q_1, q_2) \mapsto (qq_1, qq_2),$$

其中 q_1, q_2, q 为四元数. 因为 $SU(2) \subset SO(4) = (SU(2) \times SU(2))/\{-1, 1\}$, 故而可谈及类 (χ, p_1). 我们来研究一个结构群为 $SO(4)$ 的一个类似的丛. 这个丛可实现为纤维 D^4, 底空间为 S^4 的丛:

$$p : E \to S^4, \quad F = D^4, \quad G = SO(4). \tag{1}$$

由定义, 数 χ 等于自交数 $S^4 \circ S^4$, 其中 $S^4 \subset E$ 为零截影 (参看 [1], 卷 II, §24). (更准确地说, χ 为底空间 S^4 的一个上同调类: $\chi \in H^4(S^4, \mathbb{Z})$ 使 $(\chi, [S^4]) = S^4 \circ S^4$).

引理 1 丛 (1) 的空间 ∂E (以 S^3 为纤维) 同胚于球面 S^7 当且仅当 $\chi = 1$.

证明 我们来证明 ∂E 具有球面 S^7 的同伦型当且仅当 $\chi = 1$. 考虑正合序列

$$\cdots \to \pi_i(\partial E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(S^4) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(S^3) \to \cdots.$$

对于 $i = 4$, 同态 $\partial : \pi_4(S^4) \to \pi_3(S^3)$ 是这样给出的: 构造具纤维 D^4 的丛 (1) 的零截影. 现在清楚地看出, 自交数 $S^4 \circ S^4$ 等于闭链 S^3 (纤维) 在 ∂E 中的边缘 $\partial[\sigma^4]$ 的重数. 因此 $\partial[S^4] = \chi[S^3]$ (参看 [1], 卷 II, §22). 如果 $\chi \neq 1$, 我们则有

$$\begin{array}{c} 0 \to \mathbb{Z}_\chi \to \pi_3(\partial E) \to \pi_3(S^4). \\ \hphantom{0 \to \mathbb{Z}_\chi \to \pi_3(\partial E) \to \pi_3(S}\| \\ \hphantom{0 \to \mathbb{Z}_\chi \to \pi_3(\partial E) \to \pi_3(S}0 \end{array}$$

故 $\pi_3(\partial E) = \mathbb{Z}_\chi$. 如果 $\chi = 1$, 则 $\pi_j(\partial E) = 0, j \leqslant 4$, 这由前面的正合序列得到. 因为 ∂E 只具有胞腔 $\sigma^0, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^7$, 并且当 $j \leqslant 4$ 时 $\pi_j = 0$, 故有

$$H_j(\partial E) = \pi_j(\partial E) = 0, j < 7; \quad \pi_7(\partial E) = \mathbb{Z}.$$

基元 $\alpha \in \pi_7(\partial E) = \mathbb{Z}$ 由映射 $\alpha : S^7 \to \partial E$ 代表, 从而它诱导同调群的同构 (因此也是同伦群的同构). 于是 $\partial E \sim S^7$. □

存在有一般的定理 (Small,Stallings,Wallace): 当 $n \geqslant 5$ 时, 流形如果具有 S^n 的同伦型则同胚于 S^n. 由此自然得出引理 1. 也可以不利用这个定理而具体由丛经四元数构造并直接证出同胚 $\partial E \approx S^7$, 这时显式地给出一个莫尔斯函数, 使它只有一个极小和极大值 (见后面). 当固定了 $\chi = 1$ 时, 我们便有了具各种不同类 p_1 的丛.

引理 2　对任意 k, 存在丛 ξ 使得 $p_1=2k, \chi=1$ (更准确地说, $p_1=2ku, \chi=u$, 其中 $u\in H^4(S^4,\mathbb{Z})$ 为基元).

在给出引理 2 的证明前, 我们先阐述在球面 S^7 上产生非平凡光滑结构的机理.

考虑类 $p_1(E)=p^*(p_1(\xi))$; 由于切丛 $\tau_E=\tau_{S^4}\oplus p^*(\xi)$, 这是有意义的. 因此

$$p_1(E)=p^*p_1(\xi)=2kp^*u=2kv,$$

其中 $v=p^*u\in H^4(E;\mathbb{Z})$ 为基元. 对于闭链 $S^4\subset E$ 我们有

$$S^4\circ S^4=1=(\chi,[S^4]).$$

故而符号差 $\tau(E)=1$.

采用反证法. 如果边缘 ∂E 作为光滑流形是通常的球面 $S^7=\partial D^8$, 则我们有光滑流形

$$\overline{E}^8=E\bigcup D^8,\quad 其中\quad \partial E=\partial D^8.$$

另外, $H_i(\overline{E}^8)=H_i(E)$, 其中 $i\leqslant 7$; 又

$$p_1(\overline{E}^8)=p_1(E)=2kv,$$
$$\tau(\overline{E}^8)=1=\tau(E).$$

对于闭光滑流形 $\overline{E}^8$, 它具有 $\mathbb{H}P^2$ 的同伦型 (即四元数射影平面); 我们对它可以应用符号差公式 (见 §27)

$$p_2=\frac{1}{7}(45\tau+p_1^2).$$

这时数 $(p_2,[\overline{E}^8])$ 应该是个整数! 在我们的情形中

$$\tau=1, p_1^2=4k^2, p_2=\frac{4k^2+45}{7}.$$

对 $k=1$, 有 $p_2=7$, 这是通常的四元数射影平面 $\mathbb{H}P^2$ 的情形. 对 $k=0,2,3,4,\cdots$ 等等, 我们得到的 p_2 不再是整数. 这与 $\overline{E}^8$ 光滑性相矛盾.

结论　对所有使 p_2 为分式的 k, 流形 ∂E 不微分同胚于 S^7 (但同胚于 S^7).

已经知道, 类 $p_q\in H^{4q}(M^n;\mathbb{Q})$ 是连续同胚的不变量 (诺维可夫). 自然能由此推出流形 $\overline{E}^8$ 在 $k=0,2,\cdots$, 时不能引进光滑结构. 事实上, 因为 τ 显然是不变的, 故 $\overline{E}^8$ 上出现光滑结构与类 $p_1(E)$ 的不变性相矛盾. 然而, 详细的分析表明, 对某些例子可以比利用拓扑不变类更简单手段来处理这个问题 (凯尔维尔 (Kervaire)).

现在来证明引理 2.

证明 先考虑在 S^4 上的 $SO(3)$—— 丛. 因为 $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$, 我们有映射 (丛的变换)

$$p: BSO(3) \to K(\mathbb{Z}_2, 2); F = BSO(2),$$

其中 $\pi_1(B) = 0$. 它的 $\mathbb{Z}$- 同调谱序列的形状为 $E^2_{p,q} H_p(B, H_q(F)) = E^\infty_{p,q}, p+q \leqslant 5$:

4	u	0	u_1	0	u_2	u_3
	0	0	0	0	0	0
0	1	0	v	0	w	x
	0	1	2	3	4	5

,

因为 $2u \neq 0, 2x = 0$, 故 $d_5 x = 0$, 由此得到 $\pi_4(BSO(3)) \xrightarrow{H} H_4(BSO(3);\mathbb{Z})$ 是个 Coker $H = \mathbb{Z}_2$ 的映射.

类 $p_1 \in H^4(BSO(3);\mathbb{Q})$ 满足

$$(p_1, u) = 2,$$

其中 u 为群 $H\pi_4$ 的基元. 故而, 对 $G = SO(3)$, 数 $(p_1, [S^4])$ 在 S^4 上的丛 ξ 上历遍所有的偶数值.

将 $SO(3)$ 嵌进 $SO(4)$ 中, 我们则把 ξ 变到了 $\xi \oplus 1$, 而 $p_1(\xi \oplus 1) = p_1(\xi)$, $\chi(\xi \oplus 1) = 0$.

考虑 $SO(4) = (SU(2) \times SU(2))/\{-1, 1\}$ 及丛映射

$$p: BSO(4) \to K(\mathbb{Z}_2, 2), F = BSU(2) \times BSU(2).$$

在 $\mathbb{Z}$- 同调谱序列中, 考虑到 $\pi_1(B) = 0$, 则有

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) = E^\infty_{p,q}, p+q \leqslant 5,$$

4	u y	0	u_1 x_1	0	u_2 x_2	
	0	0	0	0	0	0
0	1	0	v	0	w'	x'
	0	1	2	3	4	5

,

这里的 $2x = 2v = 2w = 0, d_5 x = 0$, 这是因为 $2u \neq 0, 2y \neq 0$. 映射 $H: \pi_4(BSO(4)) \to H_4(BSO(4);\mathbb{Z})$ 不是个同构, Coker $H = \mathbb{Z}_2$.

结论 因为 p_1, χ 在对偶空间 $\mathrm{Hom}(H_4, \mathbb{Z})$ 中为基, 故 χ 可以在 S^4 上的丛上取任意的整数值, 而 p_1 取任意偶整数值.

引理得证. □

直接构造我们所要的丛 (米尔诺). 我们记得 (见 [1], 卷 II, §24), 球面 S^4 上的 $SO(4)$- 丛可以由群 $\pi_3(SO(4)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ 进行 "编号", 即整数偶对 (h, j). 对应映射 $f_{hj} : S^3 \to SO(4)$ 的显式构造由四元数给出:

$$f_{hj}(u)v = u^h v u^j,$$

其中 $u, v \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4, |u| = 1$ (即 $u \in S^3$). 以 ξ_{hj} 表示对应的 S^4 上的丛.

习题 1　证明

$$\chi(\xi_{hj}) = h + j, \quad p_1(\xi_{hj}) = \pm 2(h - j).$$

设数 h 和 j 满足 $h + j = 1, h - j = k$. 以 M_k^7 表示丛 ξ_{hj} 的空间 (其纤维为球面 S^3). 这个流形可以由两个相同的 $\mathbb{R}^4 \times S^3$ 沿子集 $(\mathbb{R}^4 \backslash \{0\}) \times S^3$ 粘合而成, 这个粘合是一个微分同胚

$$(u, v) \mapsto (u', v') = \left(\frac{u}{|u|^2}, \frac{u^h v u^j}{|u|^2}\right)$$

(请验证!)

习题 2　验证函数 f

$$f(u, v) = \frac{\mathrm{Re}\ v}{(1 + |u|^2)^{1/2}} = \frac{\mathrm{Re}\ u''}{(1 + |u''|^2)^{1/2}},$$

其中 $u'' = u'(v')^{-1}$, 在 M_k^7 上正好有两个临界点 $(u, v) = (0, \pm 1)$, 并且非退化.

由此得到, 所有流形 M_k^7 同胚于球面 S^7. 由习题 1 及本节前面的讨论知, 当 $k^2 \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$ 时, 流形 M_k^7 与 S^7 不微分同胚.

因此, 我们将看到, 存在非平凡的光滑流形它具有球面的同伦型 ("同伦球面"). 具 S^n 同伦型的流形的集合对于流形的 "连通和" 运算 (参看 §4) 是封闭的:

$$M_1^n \# M_2^n \sim S^n.$$

定义 1　称两个闭流形 M_1^n 和 M_2^n (具任意同伦型) 为 h-配边 (或 J-等价) 是说, 如果存在膜 $W^{n+1}, \partial W^{n+1} = M_1^n \bigcup M_2^n$, 并且该膜 W^{n+1} 收缩到自己的每个边缘 M_1^n 及 M_2^n.

引理 3　同伦球面的 h- 配边类构成群 θ^n.

证明　我们注意到, 连通和运算总是可结合的 (不仅对同伦球面). 考虑定向同伦球面 M_+^n 和与它相同但定向相反的 M_-^n 的连通和 $(M_+^n) \# (M_-^n) = M_0^n$. 流形 M_0^n 是下面给出的流形 W^{n+1} 的边缘 (参看图 119)

从乘积空间 $M_+^n\times I$ 中去掉乘积 $D_\varepsilon^n\times I$, 其中 $D_\varepsilon^n\subset M_+^n$ 为半径 ε 的小开球. 将其光滑化后, 我们注意到 $\partial W^{n+1}=M_+^n\#M_-^n$, 且 W^{n+1} 收缩于每个边缘.

在 W^{n+1} 中去掉小的开球 D_0^n 后, 我们得到 ∂W^{n+1} 和通常球面 S^n 之间的 h 配边. 引理得证. □

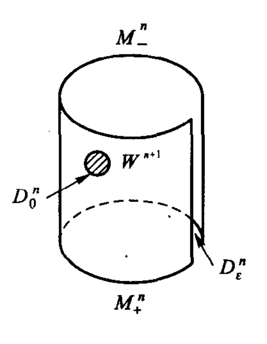


图 119

引进如下记号: ∂P^{n+1} 表示 θ^n 中由 $(n+1)$ 维可 "平行化" 流形的边缘组成的子群; $J_n\subset\pi_{N+n}(S^N), n<N-1$, 为由通常的球面 $S^n\subset\mathbb{R}^{N+n}$ 组成的子群 (参看 [1], 卷 Ⅱ, §23). 有如下的事实:

任意一个同伦球面 M^n 在嵌入到 $\mathbb{R}^{N+n}$ 中时有平凡的法丛 (对于 $n=4k$, 由波特 (Bott) 周期性 (参看 §22) 以及在 $\tau(S^n)=0$ 时对 p_k 的符号差公式得到; 对 $n\neq 4k, 8k+1, 8k+2$, 由 $\pi_n(SO)=0$ 得到. 当 $n=8k+1, 8k+2$ 时这是亚当斯 (Adams) 定理, 它由代数拓扑中更现代的技术得到).

因此, 考虑到选取 $M^n\subset\mathbb{R}^{N+1}$ 的嵌入的随意性, 我们便得到了同态 $\theta^n\to\dfrac{\pi_{N+n}(S^N)}{J^n}$. 这个同态的核为群 ∂P^{n+1} (请验证!)

对于群 ∂P^{n+1} 已知如下结果:

a) 如果 n 为偶数, 则 $\partial P^{n+1}=0$;

b) $$\partial P^{n+1}=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\\ \mathbb{Z}_2, & n=10,\\ 0 \text{ 或 } \mathbb{Z}_2, & n=4k+1;\end{cases}$$

c) ∂P^{n+1} 等于某个有限阶的循环群, 当 $n=7$ 时其阶为 28(实质上, 我们已经在前面建立了非平凡的同态 $\theta^7\to\mathbb{Z}_7$). $n=3$ 的特殊情形没有被考虑. 群 $\Gamma_n=\dfrac{\pi_{N+n}(S^N)}{J^n}$ 和 θ^n 有下列形式

$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Gamma_n=$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\theta^n=$	0	0	0	?	0	0	0	$\mathbb{Z}_{28}$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^3$	$\mathbb{Z}_2$

关于同伦球面群 θ^n 的这些事实属于米尔诺和凯尔维尔. 另外, 有定理 (斯梅尔): 对维数 $n\geqslant 5$ 的单连通流形, 任意 h- 配边 W^{n+1} 均平凡, 即 $W^{n+1}=M^n\times I$. 故而群 θ^n 除了维数 $n=3,4$ 外给出了球面上光滑结构的分类.

球面上的光滑结构和同伦型球面的流形的分类在 $n\neq 3,4$ 时是同一回事. 群 θ^3 还不知道, 但在 S^3 上没有非平凡的光滑结构. 群 $\theta^4=0$ 是知道的, 但是不知道在 S^4 上是否有非平凡的光滑结构.

现在来讲一讲维数 $n\geqslant 5$ 时的光滑闭的单连通流形的分类理论 (诺维可夫,

布劳德尔 (Browder))[1]. 自然发生的问题是: 除了同伦型和切丛等价类外, 光滑闭流还由哪些不变量决定? 对于同伦球面这种特殊情形, 我们表述过的理论 (米尔诺 - 凯尔维尔) 解决了这个问题. 对于一般的流形我们这样处理这个问题: 考虑在嵌入 $M^n \subset \mathbb{R}^{N+n}$ 下的稳定法从 ν^n, 当 $N > n+1$ 时, 它被切丛 τ^n 唯一确定, 因为这时有等式

$$\tau^n \oplus \nu^N \sim 0.$$

任意非球面同伦型的光滑流形显然并不构成群. 我们发现, 考虑托姆复形 $M(\nu^N)$ 特别有用. 存在自然嵌入 $M^n \subset M(\nu^N)$ 和流形 M^n 在 $\mathbb{R}^{N+n} \subset S^{N+n}$ 中邻域 U 的映射

$$U \to M(\nu^N),$$

它把 ∂U 变到一点. 邻域 U 就是从 ν^N 的空间. 空间偶对的映射 $(U, \partial U) \to (M(\nu^N), *)$ 以自然的方式延拓到球面的映射, 它把区域 U 在球面 S^{N+n} 的补空间映到点 $\{*\}$:

$$\psi = \psi_{M^n} : S^{N+n} \to M(\nu^N).$$

对于映射 $\psi = \psi_{M^n}$, 我们有

$$\psi_*[S^{N+n}] = \varphi[M^n] \subset H_{n+N}(M(\nu^N))$$

(其中 φ 见 §27, 引理 4). 因此, 闭链 $\varphi[M^n]$ 是球面的. 另外, 群 $H_{n+N}(M(\nu^N); \mathbb{Z})$ 等于 $\mathbb{Z}, n < N+1$. 作为 §10 结果的推论我们有

$$\pi_{N+n}(M(\nu^N)) = \mathbb{Z} + D,$$

其中 D 为有限阿贝尔群.

由此构造, 流形 M^n 对应了元素 $\psi_{M^n} \in \pi_{N+n}(M(\nu^N))$ 使得 $\psi_*[S^{N+n}] = \varphi[M^n]$. 所以 $\psi_{M^n} = 1 + \alpha, \alpha \in D$. 于是成立下面的命题.

命题 1 (诺维可夫) a) 设 M^n, D, ν^N 如上; 对每个在其上给出了保持法丛及定向的同伦等价的流形 M_1^n 即 $f: M_1^n \to M^n (\deg f = +1, f^*\nu^N_{M^n} = \nu^N_{M_1^n})$, 对应于元素 $\psi_{M_1^n} \in \pi_{N+n}(M(\nu^N))$, 其形式为 $1+\alpha, \alpha \in D$ (但一般并不唯一). 对 $n \neq 4k+2$ 成立逆命题. 对 $n = 4k+2$, 那些可以由同伦等价 "实现的" 元素 $1+\alpha$ 历遍一个子群 $\alpha \in \widetilde{D} \subset D$, 其中或者 $\widetilde{D} = D$, 或者 $\widetilde{D}$ 具指数 2.

b) 如果两个这样的流形 M_1^n 和 M_2^n 都落在同一个类 $1+\alpha \in \pi_{n+N}(M(\nu^N))$ 中, 则存在米尔诺球面 $\theta \in \partial P^{2n+1}$ 使得 $M_1^n \# \theta = M_2^n$.

推论 当同伦型和切丛 (或其不变量庞特里亚金类 $p_k \in H^*(M^n, \mathbb{Q})$) 固定时, 只能存在维数 $n \geqslant 5$ 的有限个两两不微分同胚的光滑单连通流形 (所有构造出的微分不变量均在有限阿贝尔群中取值).

[1]对于 $n = 4$ 的情形, 这个理论只推出了论断说, 同伦等价的流形为 h- 配边的.

还有一个定理 (布劳德尔, 诺维可夫) 指出, 在光流形 M_1^n 上什么样的丛 ξ 可以实现为某个流形 M_2^n 在 $M_2^n \subset \mathbb{R}^{n+N}$ 中的法丛, 其中的 M_2^n 具有 M_1^n 的同伦型:

a) 为此的必要的条件 (当 $n=6,14$ 或所有奇数 $n=2k+1 \geqslant 5$ 时也是一个充分条件) 是使闭链 $\varphi(M_1^n) \in H_{N+n}(M(\xi))$ 为球面的 (即球面 S^{N+n} 的像).

b) 当 $n=4k$ 时其充分性还需加上另一个条件, 即庞特里亚金类 $p_1(\xi), \cdots, p_k(\xi)$ 的 Hirzebruch 多项式等于符号差 $\tau[M_1^n]$. 这个条件的必要性是显然的 (参看前面的符号差公式).

这个定理还可以形式地推广到更一般的形式 (布劳德尔): 可以假设 M_1^n 不是个流形而只是一个复形, 同时在其整系数上同调群中 (不是局部的, 而只在整体上) 存在庞加莱对偶. 问题是, 什么条件下 M_1^n 才具有光滑闭流形 M_2^n 的同伦型? 对此的充分必要条件是能找到 M_1^n 上的稳定丛 ξ, 其中闭链 $\varphi(M_1^n)$ 为球面的, 并且满足 a) 和 b).

当 $n=4k+2$ 时, 所有这些定理的形式也是正确的, 但在阐述上更加复杂; 我们在这里就不再继续了.

习题 3 证明在球面 $M^n=S^n$ 的情形中我们有

$$M(\nu^N) = S^N \vee S^{N+n},$$
$$\pi_{N+n}(M(\nu^N)) = \mathbb{Z} + \pi_{N+n}(S^N),$$

即 $D=\pi_{N+n}(S^N)$.

为了对 "法不变量"$\psi_{M^n} \in \pi_{N+n}(M(\nu^N))$ 的非唯一性的程度作出估计, 需要考察在底空间映射度为 $+1$ 的法丛自身映射的同伦类构成的群:

$$M^n \xrightarrow{f} M^n, \quad \nu^N \xrightarrow{\bar{f}} \nu^N.$$

这个群作用在托姆复形 $M(\nu^N)$ 上, 其形如 $1+\alpha \in \pi_{N+n}(M(\nu^N))$ 的可容许元的作用轨道恰好对应了一个流形 M_i^n, 但可以相差到附加一个子群 ∂P^{n+1} 中的米尔诺球面 θ, 即 $M_i^n \simeq M_i^n \# \theta$.

习题 4 证明, 对于 $M^n=S^n$, 上述的 "非唯一性程度" 可归结为 $\dfrac{\pi_{N+n}(S^N)}{J^n}$ 是如何分解的. 对于 $M^4, \pi_1(M^4)=0$ 的具法丛的这个流形, 计算其自同构的同伦类群. 证明, 它在形如 $1+\alpha$ 的元素构成的子集上的作用是可迁的. 对 $\mathbb{C}P^n$ 和 $S^k \times S^l$ 计算这个群.

我们转到那个保持稳定法丛不变的同伦等价的令人非常好奇的一个性质.

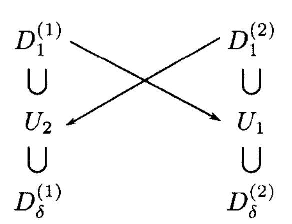
定理 1 (马祖尔 (Mazur)) 如果 $f: M_1^n \to M_2^n$ 同伦等价, 并使得 $f^*\nu_2^N =$

ν_1^N, 则具纤维 $\mathbb{R}^N$ 的丛 ν_1^N 和 ν_2^N 的空间 E_1 和 E_2 微分同胚 (在这里并未假定单连通条件), 其中 $N > n+2$.

证明 考虑映射 $f: M_1^n \to M_2^n \subset E_2$ 的以光滑嵌入 $\tilde{f}: M_1^n \to E_2$ 构造的逼近映射, 以及 "逆" 映射 $g: M_2^n \to M_1^n \subset E_1$ 的逼近映射 $\tilde{g}: M_2^n \subset E_1$, 这里有 $fg \sim 1, gf \sim 1$. 假设 $N > n+2$. 由条件要求像 $\tilde{f}(M_1^n) \subset E_2$ 和 $\tilde{g}(M_2^n) \subset E_1$ 的法丛分别为 ν_1^N 和 ν_2^N. 所以存在从由长度 < 1 的在丛 E_2 和 E_1 中的区域 $D_1^{(2)}$ 和 $D_1^{(1)}$ 分别到 U_1 和 U_2 的微分同胚, 其中 U_1 和 U_2 分别是 $\tilde{f}(M_1^n) \subset E_2$ 和 $\tilde{g}(M_2^n) \subset E_1$ 中的 $\varepsilon-$ 邻域:

$$\widetilde{F}: D_1^{(1)} \to U_1 \subset E_2, \quad \widetilde{G}: D_1^{(2)} \to U_2 \subset E_1.$$

我们注意到有 $U_1 \subset D_1^{(2)}, U_2 \subset D_1^{(1)}$, 故定义了映射 $\widetilde{G}\widetilde{F}: D_1^{(1)} \to D_1^{(1)}, \widetilde{F}\widetilde{G}: D_1^{(2)} \to D_1^{(2)}$. 不妨假定邻域 U_1 和 U_2 分别包含了 M_2^n 和 M_1^n, 连同它们各自的 $\delta-$ 邻域 $D_\delta^{(2)}$ 和 $D_\delta^{(1)}$, 其中的 δ 充分小. 事实上, 我们注意到, 邻域 U_2 包含了微分同胚像 $\widetilde{G}\widetilde{F}(D_1^{(1)})$. 于是零截影的像同伦于它自身. 所以整个流形 E_1 的微分同胚保持了所有长度 $\geqslant \frac{1}{2}$ 的向量不动, 而同痕于恒同映射, 从而这个像可以与零截影的邻域相合 (参看 [**1**], 卷 II, §10). 在这里稳定性条件 $N > n+2$ 起了实质性的作用, 它使我们能应用惠特尼的定理. (虽然读者容易看出, 这个命题可以由上面所阐述的在单连通情形下的斯梅尔定理得到, 但是我们要对非单通流形进行马祖尔定理的证明.) 我们有一个微分同胚和包含映射的图表



然而, 经过 δ^{-1} 倍的典则扩张: $E_i \xrightarrow{\delta^{-1}} E_i$, D_δ^i 微分同胚于 $D_1^{(1)}$, 同时 U_i 的大小也增加了 δ^{-1} 倍. 多次重复这种扩张, 我们得到了:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
D_\delta^{(1)} & \subset & U_2 & \subset & D_1^{(1)} & \subset & U_{2,\delta^{-1}} & \subset & D_{\delta^{-1}}^{(1)} & \subset & U_{2,\delta^{-2}} & \subset & D_{\delta^{-2}}^{(1)} \cdots \\
 & \widetilde{F}^{-1} \nearrow \searrow \widetilde{G}^{-1} & & & & \widetilde{F}_{\delta^{-1}}^{-1} \nearrow \searrow \widetilde{G}_{\delta^{-1}}^{-1} & & & & \widetilde{F}_{\delta^{-2}}^{-1} \nearrow \searrow \widetilde{G}_{\delta^{-2}}^{-1} & & & \\
D_\delta^{(2)} & \subset & U_1 & \subset & D_1^{(2)} & \subset & U_{1,\delta^{-1}} & \subset & D_{\delta^{-1}}^{(2)} & \subset & U_{2,\delta^{-2}} & \subset & D_{\delta^{-2}}^{(2)} \cdots .
\end{array}$$

因为 $\bigcup_j U_{2,\delta^{-j}} = E_1 = \bigcup_j D_{\delta^{-j}}^{(2)}$, 故微分同胚 $\widetilde{F}_{\delta^{-j}}^{(1)}: U_{2,\delta^{-j}} \to D_{\delta^{-j}}^{(2)}$ 的扩张序列的极限给出了微分同胚 $E_1 \to E_2$. 定理得证. □

推论 1 流形 M_1^n 和 M_2^n 上的丛 ν_1^N, ν_2^N 的托姆复形为连续同胚:

$$M(\nu_1^N) \cong M(\nu_2^N).$$

证明 显然. □

习题 5 如果 $n = 3$, 证明所有定向流形为平行化流形.

推论 2 如果透镜流形 $L_p^3(q_j), j = 1, 2$, 为同伦等价 (即 $q_1 = \lambda^2 q_2$, 其中 q_1, q_2, λ 为 mod$p$ 非零, 其中 p 为素数), 则它们与 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 5)$ 的直积 (参看 §11) 微分同胚于 $\mathbb{R}^5 \times L_p^3(q_1) = L_p^3(q_2) \times \mathbb{R}^5, q_1 = \lambda^2 q_2$.

平凡丛的托姆复形 $M(\nu_1)$ 和 $M(\nu_2)$ 同胚.

重要的事实 (米尔诺): 在托姆复形 $M(\nu)$ 中存在一个特殊点 $\{*\} \subset M(\nu)$, 它被组合地确定 (在单纯剖分下) 在一个 "星形" 的边缘上的锥上, 这个星形是以 S^{n-1} 为纤维的丛 ν_j 的空间; 星形边缘的组合不变量就是该复形自身的不变量. 如果球面 S^{n-1} 的维数为偶, 并且丛 ν_j 为直积, 则赖德迈斯特挠率有形状

$$R(L_p^3(q) \times S^{n-1}) = R(L_p^3(q)) \times \chi(S^{n-1}),$$

其中 χ 为欧拉示性数 (请验证!). 特别, 例如可能出现的情形为 $p = 7$:

$$R(L_p^3(q_1)) \times \chi(S^{n-1}) \neq R(L_p^3(q_2)) \times \chi(S^{n-1}),$$

其中 $\chi(S^{n-1}) = 2$. 因此托姆复形 $M(\nu_1)$ 和 $M(\nu_2)$ 不是组合等价的, 然而是同胚的.

参考文献

1. *Дубровин Б А,Новиков С П, Фоменко А Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979
2. *Рашевскии П К.* Курс дифференциальной геометрии М.: Гостехиздат, 1956
3. *Рашевскии П К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967
4. *Погорелов А В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974
5. *Погорелов А В.* Внешняя геометрия вылуклых поверхностей. М.: Наука, 1969
6. *Александров Л Д.* Внутренняя геометрия вылуклых поверхностей. М. – Л.: Гостехиздат, 1948
7. *Ефимов Н В.* Высшая геометрия. М.: Наука, 1971
8. *Норден А П.* Теория поверхностен. М.: Гостехиздат, 1956
9. *Фиников С П.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1952
10. Kobayashi S, Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. vols I and II, N. Y.: Interscience, 1963/1969
11. Seifert H, Threlfall W.Topologie. 1938. (有中译本: 拓扑学. 江泽涵译. 北京: 高等教育出版社, 1959)
12. Seifert H, Threlfall W. Variationrechnung im Grosser. Hamburger Math. Einzelscher, No. 24. Leipzig: Teeeber, 1932

13. Milnor J W. Morse theory, Ann. Math. Studies. No. 51. Princeton NJ: Princeton University Press, 1969

14. Milnor J W. Singular Points of Complex Hypersurfaces. Ann. Math. studies, No. 61. Princeton NJ: Princeton University Press, 1968

15. Milnor J W. Lectures on The hCobordism Theorem. Mathematical Notes. Princeton NJ: Princeton University Press, 1965

16. *Понтрягин Л С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1976

17. *Понтрягин Л С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973. (有中译本: 连续群. 曹锡华译. 北京: 科学出版社, 1957—1958)

18. Serre JP. Lie Algebras and Lie Group. N. Y.: W. A. Benjamin, 1964

19. Springer G. Introduction to Riemann Surfaces. Reading MA: AddisonWesley, 1957

20. Nomizu K. Lie Groups and Differential Geometry. Math. Soc. Japan, 1956

21. Chern S S (陈省身). Complex Manifolds. Textos de Mathemática, No.5. Instituto de Fisica e Mathemática, Universidade do Recife, 1959

22. Bishop R L, Grittenden R J. Geometry of Manifolds. Pureaud Appl. Math., Vol.25. New YorkLondon: Academic Press, 1964

23. Gromoll D, Klingenberg W and Meyer W. Riemannsche Geometrie im Grossen. Lecture Notes in Math. No.55. BerlinNew York: SpringerVerlag, 1968

24. Helgason S. Differential Geometry and Symmetric Spaces. N. Y.: Acadmic Press, 1962

25. Steenrod N E. The topology of Fibre bundles. Princeton Math, Series. Vol 14. Princeton University Press: Princeton, N.J, 1951

26. *Розендорн Э Р.* Задачи по дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1971

27. *Новиков С П, Мищенко А С, Соловьев Ю П, Фоменко А Т.* Задачи по геометрии. М.: Издво МГУ, 1978

28. Hilbert D, CohenVossen S. Geometry and the Imagination. N. Y.: Chelsea, 1952

29. *Рохлин В А, Фукс Д Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977

30. Lefschetz S. Algebraic Topology. Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, Vol 27, 1942

31. *Голубев В В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953

32. Hu Szen-Tsen (胡世桢). Homotopy Theory. N. Y.: Academia Press, 1959

33. Dold A. Lectures on Algebraic Topology. Grundlehren, 200, Springer-Verlag, Berlin-N. Y, 1980

34. Spanier E H. Algebraic Topology. New York: McGraw-Hill, 1966

35. Hilton P J, Wylie S. Homology theory. Cambridge Univ. Press: Cambridge: UK, 1967

36. Milnor J W, Stasheff J D. Characteristic Classes. AMS, No.76. Princeton, NJ, 1974

37. Stong R E. Notes on Cobodism Theory. Math. Notes, Princeton Univ. Press, 1969

38. Hirzebruch F. Topological Methods in Algebraic Theory. Grundelehren, 131 Springer-Verlag, Heidelberg, 1966

39. Расслоенные пространства и их приложения. Сб. переводов. М.: ИЛ, 1958

40. *Фукс Д Б, Фоменко А Т, Гутенмахер В Л.* Гомотопическая топология. М.: Издво МГУ, 1969

41. Husemöller D H. Fiber Bundles. McGram-Hill: New York, 1966

42. Mosher R E, Tangora M C. Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory. Harper's Series in Modern Math., Harper and Row: New York, 1968

43. Weil A. Introduction à létude des variétés kähleriennes. Actualités Sci. Ind. Hermann: Paris, 1958

44. *Мищенко А С, Фоменко А Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Издво МГУ, 1971

45. Steenrod N E, Epstein D B A.Cohomology Operations. AMS. No.50. Princeton Press, 1962

46. Теория голитонов/Под. ред. Новикова С. П. М.: Наука, 1979

47. Klingenberg W. Lectures on Closed Geodesics. Grundelehren, 230. Springer-Verlag, BerlinNY, 1987

48. Griffiths P A, Harris J. Principles of Algebraic Geometry. IntersciencеWiley: NY, 1978

49. Atiyah M F. K−theory. W. A. Benjamin, New York, 1967

50. Browder W. Surgery on SimplyConnected Manifolds. Ergebnisse der Math. 65, Springer−Verlag, BerlinNY. 1972

51. *Болтянский В Г, Ефремович В А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982

52. Toda H. Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres. Princeton Uni. Press, 1962

53. *Adam's J F.* Stable Homotopy Theory. Berlin, Springer Verlag, 1966 (Lect. Notes, № 3)

54. *Morse M.* "The calculus of variations in the large" Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 18, N. Y., 1934

55. Al'ber S I. "On the periodic problem of the calculus of variation in the large", UMN 12, pp57—124

56. *Люстерник Л А,Шнирельман Л Г.* "Топологические методы в вариационных задачах" Труды научно исследовательского института математики и механики М., 1930

57. *Люстерник Л А, Шнирельман Л Г.* "Применение топологии к экстремальным задачам" Труды 2го Всесоюзного математического съезда, 1935, т. I, с. 224—237

58. *Новиков С П.* "Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия, I" ИАН СССР, сер. матем., 1964, 28, с. 365—475

59. *Новиков С П* "О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях" ИАН СССР, сер. матем., 1966, 30, с. 207—246

60. *Новиков С П.* “Новые идеи в алгебраической топологии” УМН, 1965, 20, No3, с. 41—66

61. *Фоменко А Т.* “Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле” ИАН СССР, сер. матем., 1971, 35, с. 667—681

62. *Фоменко А Т.* “Многомерная задача Плато в римановых многообразиях” Матем. сб., 1972, 89, No 3, с. 475—520

63. Milnor J W. “Whitehead torsion”, Bull. Amer. Math. Soc. 72. pp. 358—426. 1966

64. Milnor J W. “On manifolds homeomorphic to the 7–sphere”, Ann of Math. (2) 64, pp399—405, 1956

65. *Мищенко А С.* “Эрмитова *K*теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа” УМН,1976, 31 No 2, с. 69—134

66. *Бухштабер В М, Мищенко Л С, Новиков С П.* “Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии” УМН, 1971, 26, No 2, с. 131—154

67. *Рохлин В А.* “Теория внутренних гомологий” УМН, 1959, 14, No 4, с. 3—20

68. *Рохлин В А.* “3мерное многообразие –граница 4мерного” ДАН СССР, 1951, 81, No 3, с. 355—357

69. Atiyah M F. “Thom Complexes”. Proc, London Math. Soc (3), 11, pp29—310. 1961

70. Milnor J W. Differential Topology. Lecture Notes, Princeton Uni. Press: 1958

71. Smale S. “On the structure of manifolds” Amer. J. Math. 84, pp.387—399, 1962

72. Smale S. “Topology and mechanics I II” Inventiones Mathematicae 10, pp. 305—331, 11, pp. 45—64

73. Лекции на математическом семинаре по гомотопической топологии, УМН, 1966, 21, No 5, с. 117—248

74. *Kervaire M A.* “A manifold which does not admit any differentiable structure”, Comment. Math. Helv., 1960, 34, No 4, p. 257—270

75. *Kervaire M A*, *Milnor J.* "Groups of homotopy spheres, 1" Ann. Math., 1963, 77, p.504—537

76. *Milnor J.* "Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct" Ann. Math., 1961, 74, p.575—590

77. *Serre J P.* "Cohomology modulo 2 des complexes d'EilenbergMcLane" Comment. Math. Helv., 1953, 27, p.198—231

78. *Cartan H.* Algebres d'EilenbergMcLane et homotopie. Seminaire H. Cartan, Ecole Norm. Super. (7e annee), 1954/1955

79. *Milnor J.* "A survey of cobordism theory" Enseign. Math., 1962, 8, No1—2, p.16—23

80. *Novikov S P.* Pontrjagin classes, the fundamental groups and some problems of stable algebra. Ess. on topology and rel. topics. Memories dedies a Georges de Rham. BerlinHeidelbergNew York: Springer Verlag, 1970

81. *Adams J F.* Stable homotopy and generalised homology. Chicago Lect. Notes in Math., 1974

应用 1
多值函数的类比莫尔斯理论. 泊松括号的某些性质

C. П. 诺维可夫

设 M 为有限维或无限维的光滑闭流形 (例如, 连接光滑流形 W^m 中两个点 x_0 和 x_1 道路空间, 或者闭的定向曲线的空间, 这里的曲线是圆到 W^m 的光滑映射). 在流形 M 上给出一个闭的 1– 形式 ω; 存在一个 (无限叶的) 覆叠 $\widehat{M} \xrightarrow{p} M$, 使得形式 $p^*\omega$ 为函数的微分 (最简单的例子是, $\omega = d\varphi, M = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, 而 $\widehat{M}$ 为对数函数的黎曼面):

$$p^*\omega = dS. \tag{1}$$

我们称 S 为在流形 M 上的 "**多值函数**". 在无穷维情形我们假设, 在临界 (平稳) 点 ($dS = 0$ 或 $\omega = 0$) 处, 函数 S 存在二阶微分 d^2S, 并且有有限个负平方项 (即 "莫尔斯指数") 和有限的退化阶. 实际上我们要考虑的只是所有临界点或者非退化或者构成非退化临界流形 (参看 §3) 的情形. 我们还将假设, 函数 S 具有明确定义的 "梯度下降", 就是说, 在流形 $\widehat{M}$ 上, 任意一个紧子集在按 S 的梯度方向下降时, 或者遇到临界点, 或者逐次的往 "下" 地经过函数 S 的水平面.

我们的任务是, 对于多值函数 S (即闭 1– 形式 ω) 构造一个类似的莫尔斯理论, 以估计 S 的在任意莫尔斯指数 i 时的临界 (平稳) 点的个数. 我们以 $m_i(S)$ 或 $m_i(\omega)$ 记具莫尔斯指数 i 的平稳点的个数, 其中有 $p^*(\omega) = dS$.

在群 $H_1(M, \mathbb{Z})$ 中可以选取这样的基 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \cdots, \gamma_N\}$, 使得

$$\oint_{\gamma_j} \omega = \begin{cases} 0, & j \geqslant k+1, \\ \mu_j \neq 0, j \leqslant k, \end{cases} \tag{2}$$

其中所有 $\mu_j, j=1,\cdots,k$ 在有理 (或整) 系数上线性无关. 称数 $k-1$ 为形式 ω 的 "无理度". 极小覆叠 $p:\widehat{M}\to M$ 把形式 ω 拉回到 $\widehat{M}$ 上单值函数的微分 $dS=p^*\omega$, 这个覆叠的单值化群正好等于 $\mathbb{Z}^k$, 即具 k 个生成元 $t_1,\cdots,t_k$ 的自由阿贝尔群, 它像 "平移" 那样作用在 $\widehat{M}$ 上:

$$t_j:\widehat{M}\to\widehat{M}.$$

实际上,"无理指数" $\mu=(\mu_1:\mu_2:\cdots:\mu_k)\in\mathbb{R}p^{k-1}$ 是射影空间中的点. 特别简单而又有兴趣是 $k=1$ 的情形, 这时形式 ω 给出了整系数上同调群中的元素 $[\omega]\in H^1(M,\mathbb{Z})$. 在这个情形中, 函数 $\exp\{2\pi iS\}$是 M 上的一个单值复值函数, 其模为 1, 即一个映射

$$f=\exp\{2\pi iS\}:M\to S^1. \tag{3}$$

关于对这种映射的临界点建立类似的莫尔斯理论的问题似乎完全是经典的东西, 然而在不久之前 (直到 1981 年) 在文献中还看不到关于这个问题的任何研究.

我们考虑无限维的 "多值泛函" 的例子, 它自然地化成了我们在前面提出的问题. 设 W^m 为在度量 $g_{ij}(x)$ 下完备的黎曼流形, 其上给定了一个闭 2- 形式 $\Omega, d\Omega=0$. 给出覆盖 $W^m=\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ 为那样的区域族, 它们满足

a) 形式 Ω 在任一 U_α 上为恰当:

$$\Omega|_{U_\alpha}=d\psi_\alpha; \tag{4}$$

b) 对从线段 I 或圆 S^1 到 W^m 的任意光滑映射 γ, 存在区域 U_α, 使得 γ 整个地落在 U_α 中.

考虑流形 $M=\Omega(W^m,x_0,x_1)$, 它是连接两个点的道路的流形, 或者 $M=\Omega^+(W^m)$, 这是闭的定向曲线的空间; 并且我们以区域覆盖它: $M=\bigcup\limits_\alpha N_\alpha$, 其中 N_α 为所有的曲线 $\gamma\subset U_\alpha$ 组成. 每个交集 $N_\alpha\bigcap N_\beta$ 可表示为 $N_\alpha\bigcap N_\beta=\bigcup\limits_q N_{\alpha\beta}^{(q)}$, 其中 q 为 $H_1(U_\alpha\bigcap U_\beta,\mathbb{R})$ 中曲线的同调类的编号, 这些曲线为闭的或者具有两个端点 x_0,x_1 的. 在每个集合 N_α 上, 我们给出单值的泛函

$$S^{(\alpha)}\{\gamma\}=\int_\gamma(dl-\psi_\alpha). \tag{5}$$

引理 1 在交集 $N_{\alpha\beta}^{(q)}$ 中, 对每个 q, 泛函的差 $S^{(\alpha)}\{\gamma\}-S^{(\beta)}\{\gamma\}$ 为常数.

证明 事实上, 这个泛函差可表示为

$$S^{(\alpha)}-S^{(\beta)}=\int_\gamma(\psi_\beta-\psi_\alpha), \tag{6}$$

其中 $d\psi_\alpha=d\psi_\beta$. 所以对每个同调类 q, 这个积分是个常数. 引理得证. □

于是泛函组 $S^{(\alpha)}$ 定义了一个 "多值泛函" S 使得 δS 是在无限维流形 M 上整体定义了一个 1– 形式.

这个例子有个自然的推广: 设给出了光滑映射 $\gamma: V^l \to W^m$ 上的某种足够正则的单值泛函 $S_0\{\gamma\}, V^l$ 和 W^m 为两个完备的黎曼流形. 设给出了 W^m 上的闭 $(l+1)$– 形式 $\Omega, d\Omega=0$, 以及覆盖 $W^m=\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, 使得

a) $\Omega|_{U_\alpha}=d\psi_\alpha$;

b) 对任意 γ, 存在编号 α, 使得 γ 的像整个落在区域 U_α 内.

完全类似于前面, 在所有映射 $V^l \to W^m$ 的流形 M 上 ("手征场")出现了 "多值泛函" $S=S_0+\int_\gamma \psi_\alpha$ (参看 [1], §5)

回到 $l=1$ 的情形, 这时对流形 W^m 上的完备黎曼度量 g_{ij} 和任意 2– 形式 Ω, 所有平稳点的莫尔斯指数有限, 并且 $\widehat{M}$ 上梯度下降的流有确定的定义. 这种情形出现在那个类似的 "莫佩尔蒂 – 费马 (Maupertuis – Fermat) 泛函" 中: 在黎曼流形 W^m (这里设 $m=2$ 或 3) 上, 在固定的流量 E 下, 一个在位势场 $u(x)$ 和磁场 Ω 中的带电粒子的运动轨线由泛函

$$\widetilde{S}(\gamma)=\int_\gamma (d\tilde{l}_E - A_j dx^j) \tag{7}$$

的极值曲线定义, 其中

$$(d\tilde{l}_E)^2 = 2m(E-u(x))g_{ij}dx^i dx^j, d(A_j dx^j)=\Omega \tag{8}$$

(参看 [1], 卷 I, §33). 在这里磁场假定是个恰当 2– 形式. 对于非恰当的 2– 形式 Ω, 我们则转到多值泛函上去考虑. 我们在后面总是假定度量 $\tilde{l}_E$ 满足完备化的条件. 在流形 W^m 为紧的情形, 这个条件等价于

$$E > \max_{W^m} u(x). \tag{9}$$

对于非单连通流形 W^m (例如环面 $W^m=T^m$) 可能发生这样的情形: 不管前面所有的结构和形式 Ω 的非恰当, 最终因为这个道路空间 M 的单连通性, 则 1– 形式 δS 是恰当的. 至于 1– 形式 δS 的恰当性以及函数 S 的单值性, 只要让形式 Ω 在万有覆盖 $q: \widehat{W}^m \to W^m$ 上为恰当就可以了: $q^*\Omega=d\psi$. 如果形式 Ω 的上同调类 $[\Omega]\in H^2(W^m;\mathbb{R})$ 包含在仅仅与基本群有关的子群中:

$$[\Omega]\in H^2(\pi_1,\mathbb{R})\subset H^2(W^m,\mathbb{R})$$

(其中 $H^2(\pi_1,\mathbb{R})$ 如前所定义, 为 $H^2(K(\pi_1,1);\mathbb{R})$), 则上述条件是成立的.

习题 1　求出在闭曲线空间上使函数 S 可取任意大负值的一个充分条件, 其中的条件是加在群 π_1 和上同调类 $[\Omega]\in H^2(\pi_1,\mathbb{R})$ 上的.

对于单连通的流形 W^m 则不会发生这种情形. 这时 1– 形式 dS 对 M 上基闭链上的积分以及形式 $\omega = (\delta S)$ 的无理度被 2– 形式 Ω 在 $H_2(W^m, \mathbb{Z})$ 中的 2 维基闭链上的积分组决定, 事实上它们相等.

某些重要的经典力学系统可以化为形如 (7) 的泛函的极值曲线的问题 (诺维可夫 – 史梅里策尔).

1. 关于刚体在理想流体中运动的基尔霍夫 (Kirchhoff) 问题, 其中的流体在位势不运动, 并在无穷远处停止不动.

2. 关于在一个轴对称 (特别为常值) 的重力场中绕定点的刚体旋转问题, (例如旋转的陀螺或回转器等).

这两个问题都可以通过方程来描述, 这些方程在经过某些变换后可表示为在李代数 $L = E(3)$ 上的哈密顿系统, 其中 $E(3) = L$ 是三维欧氏空间运动群的李代数, 而其相空间为对偶空间 L^*. 选取 L^* 的一组基 (e_j^*), 我们则可把任意元表示为

$$l^* = \sum l_i e_i^*, \tag{10}$$

其中 $l_i \in L$ 为 L^* 上的线性形式, $L = (L^*)^*$. 由定义, 对 L^* 上的任意函数 $f(l^*)$ 的泊松括号由下面的条件决定.

1. L^* 上两个线性函数即李代数 L 中的元素的泊松括号与 L 中的换位子相同:

$$\{l_i, l_j\} = c_{ij}^k l_k. \tag{11}$$

2. L^* 上任意函数的泊松括号除去条件 1 外还由下面的一般性公理所决定: 双线性性, 反交换性, 雅可比恒等式, 以及函数乘积的莱布尼兹公式

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + \{g, h\}f. \tag{12}$$

一般来说, 在流形 N^q 上的任意函数的泊松括号在局部坐标 $(x^1, \cdots, x^q)$ 下由张量 $h^{ij}(x) = -h^{ji}(x)$ 按公式

$$\{f, g\} = h^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y^j} \tag{13}$$

定义. 使公式 (13) 给出了泊松括号的条件即要求成立雅可比恒等式, 则需对张量 $h^{ij}(x)$ 给予限制: 如果 $\det(h^{ij}) \neq 0$, 则张量 h^{ij} 的逆 2– 形式 $h = h_{ij} dx^i \wedge dx^j$ 应该是闭形式: $dh = 0, h_{ij} h^{jk} = \delta_i^k$.

最简单的情形, $h^{ij} =$ 常数出现在经典的哈密顿体系中, 它是由变分法计算引起来的 (参看 [1], 卷 I, §33). h^{ij} 为 x 的线性函数的情形在近 15 年来在文献中进行了有意思的研讨, 原因是 $h^{ij}(x) = c_k^{ij} x^k$ 的这些 c_k^{ij} 原来就是李代数的结构常数 (由泊松括号的雅可比恒等式得到).

显然, 对 x 为二次的括号 $h^{ij} = c^{ij}_{kl}x^k x^l$ 情形也是非常有意思的, 现在也开始了研究 (Склчнин,Фаллеев).

对我们来说, 重要的是 "对 x 线性" 的李代数情形, 特别局限在代数 $L = E(3)$ 上. 我们选取这个代数的标准的生成基 $(M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3)$, 其中生成元 p_i 对应于平移, 而 M_i 对应于旋转. 泊松括号 (11) 按定义应具有 $L = E(3)$ 中换位子的形状:

$$\begin{aligned}
&\{M_i, M_j\} = \sum \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \varepsilon_{ijk} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ i\ j\ k \end{pmatrix}, \\
&\{M_i, p_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k, \\
&\{p_i, p_j\} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

在基尔霍夫问题中的哈密顿系统 $H(M, P)$ 与刚体 - 流体系统的能量相同, 它是在空间 L^* 上变量 (M, p) 的正定二次型 (如果刚体不是单连通的, 在 H 中可能会有线性项):

$$H = \sum a_{ij} M_i M_j + \sum b_{ij} M_i p_j + \sum c_{ij} p_i p_j. \tag{15}$$

对于刚体在轴对称引力场 $U(z)$ 中绕固定点的运动 (陀螺), 空间 L^* 上的哈密顿有形状

$$H = \sum a_{ij} M_i M_j + U(d_i p_i), \tag{16}$$

其中的 d_i 为常数, 它们由质心和固定点的位置决定. 二次型 $\sum a_{ij} M_i M_j$ 总假设为正定的. 在情形 (16) 中有对此形式的一个不等式形式的限制条件, 这在基尔霍夫问题 (15) 中则没有.

运动方程为

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \tag{17}$$

除去能量 $H = E$ 外, 对于方程组 (17) 保持表达式 (积分) 不变的一般形式是那些函数 $f_l(M, p)$, 它们满足

$$\{f_l, M_i\} \equiv \{f_l, p_i\} \equiv 0, \tag{18}$$

$i = 1, 2, 3$, 即泊松括号的零化子. 这些函数原来是在李代数的被称做 "包络代数" 的中心之中, 它们在所给情形下化为了两个函数 ("基尔霍夫积分")

$$f_1 = \sum p_i^2, \quad f_2 = \sum M_i p_i \tag{19}$$

(请以初等计算验证 (19)!).

在关于陀螺仪的问题中, 函数 p_i 总使得 $f_1 \equiv 1$. 称这种情形下的积分 f_2 为 "面积常数". 在水平曲面 $f_2 =$ 常数 $= ps$, 泊松括号由 (14) 给出, 而矩阵

$h^{ij}(x)$ 在这个四维流形上当 $p \neq 0$ 时是非退化的: $\det h^{ij} \neq 0$. 故而定义了一个 "辛"2– 形式 $h = h_{ij}dx^i \wedge dx^j, h_{ij}h^{jk} = \delta_i^k, dh = 0$. 形式 h 依赖于水平值 $f_1 = p^2, f_2 = ps$. 有下面重要论断.

引理 2 变量变换

$$\begin{aligned}
&y^1 = \theta, y^2 = \varphi, \xi_1 = p_\theta, \xi_2 = p_\varphi, \gamma = \frac{s}{p},\\
&0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\\
&p\sin\theta = p_3, M_3 - \gamma p_3 = -p_\varphi,\\
&p\cos\theta\cos\varphi = p_2, M_2 - \gamma p_2 = p_\varphi \tan\theta \sin\varphi + p_\theta \cos\varphi,\\
&p\cos\theta\sin\varphi = p_1, M_1 - \gamma p_1 = p_\varphi \tan\theta\cos\varphi - p_\theta \sin\varphi,
\end{aligned} \tag{20}$$

把在水平曲面 $f_1 = p^2 \neq 0, f_2 = ps$ 上的泊松括号化为

$$\{y^a, y^b\} = 0, \{y^a, \xi_b\} = \delta_b^a, \{\xi_1, \xi_2\} = s\cos\theta. \tag{21}$$

此时, 这个辛 2– 形式具有下面形状:

$$h = \sum_{a=1}^{2} dy^a \wedge d\xi_a + s\cos\theta d\theta \wedge d\varphi = h_0 + \Omega,$$

其中 Ω 为 S^2 上的闭形式.

从拓扑上看, 水平曲面 $f_1 = p^2 \neq 0, f_2 = ps$ 微分同胚于 $T^*(S^2)$, 即球面 S^2 上的余切丛. 形式 h 和 Ω 在基闭链 $[S^2] \in H_2(T^*(S^2)) = \mathbb{Z}$ 上的积分有

$$\iint_{S^2} h = \iint_{[S^2]} \Omega = 4\pi s = 4\pi f_2 f_1^{-1/2}.$$

证明 这个引理直接由计算得到. 轨道 $f_1 = p^2, f_2 = ps$ 的拓扑结构由积分 f_1, f_2 的形状几乎就是显然的了. □

我们在 $T^*(M^n)$ 上遇到了形如 $h = h_0 + \Omega$ 的泊松括号, 其中 Ω 为底空间 M^n 上的闭 2– 形式. 这样的泊松括号等价于在系统中包含了一个形式的磁场 Ω. 因此, 在基尔霍夫问题和陀螺仪问题中, 运动的轨线可以由 "莫佩尔蒂 – 费马" 原理得到, 就是说由形如 (7) 的泛函得到, 这个泛函当 $s \neq 0$ 或 $f_2 \neq 0$ 时是多值的 (对于经典的陀螺仪问题,"面积常数" 不为零). 在曲面 $f_1 = p^2 \neq 0, f_2 = ps$ 上的哈密顿 H 在变换 (20) 下具有形状:

$$H = \frac{1}{2}g(y)\xi_a\xi_b + A^a(y)\xi_a + U(y),$$

并且泊松括号由公式 (21) 定义. 这个系统等价于在区域 $U_\alpha = S^2 \setminus (P_1 \bigcup P_2)$($P_1$ 和 P_2 为上下两极) 中的拉格朗日系统, 这个系统由力学的作用泛函

$$S^{(\alpha)}\{\gamma\} = \int_\gamma \left(\frac{1}{2}g_{ab}\dot{y}^a\dot{y}^b - U(y) - A_a(y)\dot{y}^a - s\sin\theta\dot{\varphi}\right)dt \tag{22}$$

定义, 其中

$$g_{ab}g^{ac} = \delta_b^c, A_a g^{ac} = A^c, y^1 = \theta, y^2 = \varphi, U = V - \frac{1}{2}A^a A^b g_{ab}.$$

泛函 S 具有球面 S^2 上带电粒子的作用泛函的形状, 球面 S^2 在位势场 $U(x)$ 和磁场 $\Omega_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ 中, 并有度量 g_{ab}, 因为在 $s \neq 0$ 时 "磁场" 是拓扑非平凡的, 故 Ω_{12} 是非平凡的 "单极" 磁场. 对球面 S^2 上区域 U_α 的相对两极

$$\alpha = (P_1 \bigcup P_2)$$

起着指标的作用. 对于覆盖 $S^2 = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, 它满足了前面用来定义多值泛函的条件 (见 (4)). 因此, 在我们的情形中, 当 $s \neq 0$ 时 S 是这个系统的作用泛函, 它依赖于水平面 (p, s).

当能量 E 固定时, 运动的轨线可以由莫佩尔蒂 - 费马泛函得到, 它也是多值的, 其中的 $\delta\widetilde{S}$ 为闭的无限维 1– 形式

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{(\alpha)} &= \int_\gamma (d\tilde{l}_E - A_a^{(\alpha)} dy^a),\\ d\tilde{l}_E &= \sqrt{2(E-U)g_{ab}\dot{y}^a\dot{y}^b}.\end{aligned} \tag{23}$$

对于 $E > \max\limits_{S^2} U(y)$, 度量 $\tilde{l}_E$ 是完备的.

我们来指出形如 (7) 的单值或多值泛函的一个显然重要的性质. 在闭定向曲线的空间 $M = \Omega^+(S^2)$ 上单点曲线全体构成了非退化的局部极小的临界流形. 我们将在无穷叶覆叠 $p : \widehat{M} \to M$ 上对泛函 $\widetilde{S}$ 法化 (其中 $\widetilde{S}$ 为单值), 使得在单点曲线的流形的原像 $< p^{-1}(S^2) = \bigcup\limits_n S_n^2$ 的一个分支 (设标号 0) 上, 该泛函取零值:

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(S_0^2) &= 0,\\ \widetilde{S}(S_n^2) &= n \iint\limits_{[S^2]} \Omega = 4\pi n s.\end{aligned} \tag{24}$$

这个性质有在流形 W^m 上显然的推广.

我们来应用闭曲线空间的这些性质. 用 (曲) 线段 $I = [0, 1]$ 连接覆叠空间 $\widehat{M}$ 中两个局部极小分支, 使得点 0 在 S_0^2 中而 1 在 $S_1^2 \subset \widehat{M}$ 中. 我们开始按 $\widetilde{S}$ 的梯度方向 "向下" 移动这个线段, 得到了线段 $I_\tau, \tau \geqslant 0, I_0 = 0$. 我们看到:

a) 对所有 τ, 曲线段的端点不动;

b) $\max\limits_{\tau=\cos t} \widetilde{S}(I_\gamma) \geqslant 4\pi s$, 这是因为在边缘是局部极小. 由此连同熟知的极大原理得到了鞍点判别点的存在性, 这个点在非退化情形时指数为 1.

因此成立下面的定理.

定理 1 (诺维可夫) 对在条件 (9) 下的所有参数值 (E,p,s), 存在基尔霍夫和陀螺问题中的积分轨线, 它在与刚体相伴的坐标系中是周期的.

注 a) 许多力学家利用扰动理论的方法得到了更加明显的近似可积情形的这类轨线族. 但是把这些族扩张到远离可积情形的参数值上的可能性仍未得到证明.

b) 在陀螺问题中, 对面积常数为零的情形: $s=0$, 出现了 S^2 上的单值泛函, 由于莫佩尔蒂 – 费马原理, 即是等价的度量. 这是以前用其他方法得到过的结果 (Козлов, Харламов). 其中对 $E>\max U(x)$ 的情形可用熟知的柳斯捷尔尼克 – 史尼雷尔曼 (Июстерника – ШнирелбМана) 定理得出; 对 $E\leqslant \max U(x)$ 情形则由柯兹洛夫得到.

现在转到关于构造对闭 1– 形式 ω 的类比莫尔斯理论的纯拓扑问题, 这里的 ω 定义在一个光滑的闭有限维流形 $M=M^n$ 上. 最简单的情形是形式 ω 代表了一个整系数上同调类 $[\omega]\in H^1(M^n;\mathbb{Z})$, 我们有一个到圆的映射

$$f=\exp(2\pi iS):M^n\to S^1,\quad S=\hat{f}:\widehat{M}\to\mathbb{R}.$$

我们就考虑这种情形. 如果没有临界点, 则映射 f 定义了底空间 $B=S^1$ 上的一个光滑丛. 循环 $\mathbb{Z}$– 覆叠 $p:\widehat{M}\to M^n$ 可以这样构造: 将闭链 $D[\omega]\in H_{n-1}(M^n;\mathbb{Z})$ 实现为子流形 N^{n-1}, 其中 D 为庞加莱对偶算子. 按闭链 N^{n-1} 切割 M^n, 我们得到了一个膜 W^n , 有两个边缘 $\partial W^n=N^{n-1}\bigcup N_1^{n-1}$, 各自微分同胚于 N^{n-1} (也可参看 §27). 让我们取无穷多个复制的 $W^n\approx W_i^n,\partial W_i^n=N_{i,0}^{n-1}\bigcup N_{i,1}^{n-1}$, 每个 $N_{i,j}^{n-1}$ 微分同胚于 N^{n-1}. 把它们的边缘按所标出分支的序号粘合起来:

$$\widehat{M}=\bigcup_{\infty>i>-\infty}W_i^n,\quad N_{i-1,0}^{n-1}=N_{i,1}^{n-1},\quad -\infty<i<\infty.$$

可以假定流形 $N^{n-1}=N_0^{n-1}$ 被选为 S 的水平曲面 (或者说是映射 $f=\exp(2\pi iS)$ 下一个点的原像). 单值化算子的作用为

$$\begin{aligned}&t:W_i^n\mapsto W_{i+1}^n,N_{i,0}^{n-1}\mapsto N_{i,1}^{n-1}=N_{i+1,0}^{n-1},\\&\widehat{M}\to\widehat{M}.\end{aligned}\tag{25}$$

按照一般原理, 函数 S 应该能产生一个胞腔复形 (参看 §15). 但在目前的情形, 并不满足通常莫尔斯理论的一个重要的基本条件: 在这个理论中总要求无论在有限维还是在无穷维时小于一个值的区域: $S\leqslant a$ 是相对紧的. 当前的情形虽然这不成立, 但是从每个指数为 i 的临界点 “向下” 发出了沿水平面的 “最速降曲面”, 它 (或者如有必要, 其小的扰动) 自然地看成是 “胞腔”. 然而这个 “胞

腔” 可能沿 S 的水平面延伸到 $-\infty$; 在它的代数边缘中可能出现无穷多个 $i-1$ 维的这种 “胞腔”. 在位移 $t:\widehat{M}\to\widehat{M}$ 下, 函数 S 自身会增加一个常数, 临界点变到临界点. 因此, 我们有了结论:

a) 每个临界点确定了在我们所感兴趣的复形中的自由生成元;

b) 胞腔的边缘可以是这个复形的胞腔的无穷线性组合, 这些胞腔位于函数 S 的水平面的 “下面”, 即只在 $\widehat{M}$ 的一边延伸到 ∞.

c) 所有这些 “胞腔” 可由有限个基按群 $\mathbb{Z}$ 的元 t^{m_j} 所有可能的移动得到, 其中这些元作用于 $\widehat{M}$.

引进由形如

$$\sum_{-\infty<\text{ 常数 }<j} m_j t^j \tag{26}$$

罗朗级数构成的环, 其中系数 m_j 为整数, 并对充分负的负数 j 为零. 以 $K=\widehat{\mathbb{Z}}^+[t,t^{-1}]$ 表示这个环. 我们把由流形 M^n 上的多值函数或在覆叠 $\widehat{M}\to M^n$ 上的函数 S 生成的胞腔复形看成是自由 $K-$ 模复形 C, 其具有有限个生成元 (因为临界点的个数有限). 复形 C 的形状为

$$0\to C_n\to C_{n-1}\to\cdots\to C_1\xrightarrow{\partial}C_0\to 0,$$

其中 ∂ 为 $K-$ 模同态. 我们注意到, 与通常的莫尔斯理论不同, 在这里可能出现 $C_0=0, C_n=0$ 的情形. 另外, 在任意流形 M^n 上存在任意非平凡上同调类的 $1-$ 形式 $[\omega]\in H^1(M^n,\mathbb{Z})$ 使得它一般并不存在局部极小和极大 (即 $C_0=C_n=0$).

对于底 S^1 上的斜积 M^n 存在没有临界点的形式 ω, 即 $C_n=C_{n-1}=\cdots=C_0=0$.

成立下面引理.

引理 3　由任意光滑闭 $1-$ 形式 ω 生成的 $K-$ 模复形的同调群为同伦不变.

我们不去证明这个简单的引理了, 但我们看出这些同调群的不变量可以用来得到在多值函数时的类似的莫尔斯不等式, 这个函数由到圆的映射产生:

$$\exp(2\pi iS):M^n\to S^1.$$

环 K 是上同调一维的 (如果级数 (26) 的系数是域中的元, 则 K 也是域). 于是, 自由 $K-$ 模的子模仍是自由模. 因而可以选取闭链 $Z_k=\mathrm{Ker}\partial\subset C_n$ 生成的群 (模) 和 “边缘”$B_k\subset Z_k$ 的自由基. 我们称这两个模的秩的差为 “贝蒂数”, 并以 $b_k(M^n,a)$ 表示, 其中 $a=[\omega]$:

$$b_k(M^n,a)=\mathrm{rank}Z_k-\mathrm{rank}B_k.$$

类似地, 可定义挠数 $q_k(M^n, a)$: 选取模 Z_k 的自由基 $(e'_1, \cdots, e'_N)$ 和子模 B_k 的自由基 $(e'_1, \cdots, e'_L)$, 其中 $N - L = b_k$, 它们有下面的性质:

$$e'_j = \left(n_j + \sum_{k \geqslant 1} n_{jk} t^k\right) e_j + \sum_{i > L} q_{ij}(t) e_i,$$

其中 1) 数 n_j 除尽数 n_{j+1}; 2) 级数所有的项 $q_{ij}(t)$ 的关于 t 的次数非负;3)$q_{ij}(0) \neq 0$, 并对所有 i, j 它除尽 n_j (如果级数 q_{ij} 不恒等于零). 使 $n_j \neq 1$ 的所有指标 j 的个数称做挠数, 记为 $q_k(M^n, \omega)$. 数 $q_k + b_k$ 与模 $H_k = Z_k/B_k$ 的极小生成元的个数相等.

定理 2　到圆的映射 $\exp(2\pi i S)$ 或者闭 1− 形式 ω, 其中 $[\omega] \in H^1(M^n; \mathbb{Z})$ 的指数为 i 的临界点的个数 $m_i(S)$ 或 $m_i(\omega)$ 成立下面类比的莫尔斯不等式:

$$m_i(S) \geqslant b_i(M^n, [\omega]) + q_i(M^n, [\omega]) - q_{i-1}(M, [\omega]). \tag{27}$$

这个定理的证明并不复杂, 可由前面的讨论得到.

我们注意到, 我们所得到的类比莫尔斯不等式类似于经典的那个不等式, 但包含在它们中间的拓扑不变量具有更加复杂的几何意义.

对于满足 $\pi_1(M^n) = \mathbb{Z}$ 的流形, 类似于在单连通流形上单值函数的斯梅尔定理的关于不等式 (27) 为最好估计的问题是有意义的. 可以不太难地构造出一个水平曲面 $N^{n-1} \subset M^n$, 它对偶于类 $[\omega] \in H^1(M^n; \mathbb{Z})$, 并且连通和单连通 (当 $n \geqslant 5$ 时的所有情形都对). 另外, 利用在具两块边缘 $\partial W^n = N^{n-1} \bigcup N^{n-1}$ 的膜 W^n (由切开 M^n 得到) 上的斯梅尔函数, 可以以 "极小地" 方式延伸水平曲面 N^{n-1} 到整个 M^n, 从而得到 M^n 上的形式 ω 和在覆叠 $\widehat{M} \to M^n$ 上的函数 S. 但是这个形式 (或多值函数) 可能的临界点的个数远非极小. 极小的 1− 形式 ω 的构造要求选取在某种意义下的 "极小" 初始流形 $N^{n-1} \subset M^n$, 当然, 如果这种选取一般是存在时才有意义. 对于具群 $\pi_1(M^n) = \mathbb{Z}$ 的流形彻底分析这个问题是有意思的.(这个问题已由法尔伯 (Farber) 在 1983 年解决).

对于更复杂的情形 $k > 1$, 我们作几点注解, 即当形式 ω 至少有两个有理的独立的在一维闭链的积分:

$$\chi_i = \oint_{\gamma_i} \omega, \gamma_1, \cdots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \cdots, \gamma_N \text{为} H_1(M^n; \mathbb{Z}) \text{的基},$$

$$\chi_1 \neq 0, \cdots, \chi_k \neq 0, \sum m_i \chi_i \neq 0,$$

其中 m_i 为任意整数. 有覆叠 $\widehat{M} \xrightarrow{p} M^n$, 其中 $p^*\omega = dS$. 并且单值化群为自由阿贝尔的. 引进环 K_χ, 它由 $b \in K_\chi$ 的整系数级数

$$b = \sum_{m=(m_1 \cdots m_k)} b_m t_1^{m_1} \cdots t_k^{m_k}$$

组成, 使得

1. 如果 $\sum m_i\chi_i$ 的绝对值充分大且非负, 则 $b_m \equiv 0$.

2. 对 χ "稳定", 就是说对任意级数 b 存在数 $\varepsilon > 0$ 和 N, 使得当满足条件

$$\sum m_i\chi_i^* < -N, \text{其中} \sum |\chi_i^* - \chi_i| < \varepsilon$$

时, $b_m \equiv 0$.

闭的 1− 形式 ω 定义了一个胞腔复形, 它被看成是 $K_\chi-$ 模的复形. 这个复形的同调群为同伦不变, 并可以作为构造莫尔斯不等式的基础. 有趣的是研究这里 χ 的复形和同调群之间的相互依赖关系, 其中的形式 ω 有小的变化而临界点本质上仍和以前一样.

如果形式 ω 完全没有临界点, 则流形 M^n 有形式

$$M^n = \frac{\widehat{M}}{\mathbb{Z}^k} = \frac{\widehat{N} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z}^k},$$

其中 $\widehat{N}$ 为 $\omega = 0$ 给出的叶状结构的纤维. 这时的所有叶 (纤维) 是相同的. 没有临界点并在闭链上有有理积分的闭形式 $\omega_j \to \omega$ 对形式 ω 的逼近知道, 显然流形 M^n 是底为圆的一个斜积. 这个斜积的纤维是紧的流形 N_j^{n-1}, 是 $\widehat{N}$ 的一个商空间,

$$\widehat{N} \to N_j^{n-1},$$

即 $\widehat{N}$ 为 N_j^{n-1} 上的正则覆叠, 其单值化群为 $\mathbb{Z}^{k-1}$.

应用 1 的参考文献

1. *Новиков С П, Шмепбцер И.* Функц. анализ. 1981, 15, No3, c.54

2. *Новиков С П.* Функц. анализ. 1981, 15, No4, c.37—52

3. *Новиков С П.* ДАН СССР, 1981, 260, No1, c.31

4. *Новиков С П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН, 1982, 37, No 5, c.3—49

5. *Новиков С П, Тайманов И А.* ДАН СССР, 1984, 274, No1, c.26, (Работа[5] содержит исправление некоторых неточностей обзора[4].)

应用 2
普拉托问题. 配边和在黎曼流形中的整体极小曲面

A. T. 福明柯

I. 局部极小曲面

像我们在 [1], 卷 I, §37 中了解到的, 在三维空间中一个固定电线圈上张着的皂膜是个二维极小曲面的漂亮、直观的物理模型. 让我们来回忆高维体积泛函的定义. 设 V^k 为黎曼流形 M^n 中的一个光滑紧子流形, 又设 $D \subset V^k$ 为在此子流形上的一个紧区域, 而 g_{ij} 为 V^k 上的诱导黎曼度量. 于是定义了一个数 $\mathrm{vol}_k D$, 即所谓的在子流形上对于度量 g_{ij} 的该区域的 $k-$ 维体积. 如果子流形为紧, 则有一个对应关系 $V^k \mapsto \mathrm{vol}_k V_k$, 它给出了在 $k-$ 维子流形类上的黎曼体积泛函. 这个泛函的极值流形被称为*局部极小曲面*. 例如, 对于嵌入在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面 V 的情形, 这个泛函的欧拉 - 拉格朗日方程的解便是局部极小曲面, 这已在 [1], 卷 I, §37 推导过. $\mathbb{R}^n$ 中超曲面 V 的局部极小性的条件可以用这个曲面在欧氏空间中的嵌入的局部不变量的语言来刻画. 让我们回忆一些经典的结果 (其证明可以参看例如 [1], 卷 I, §37):

命题 1 设 $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 为光滑超曲面 (可能具有非空的边缘). 这个超曲面的平均曲率恒等于零当且仅当这个曲面可以在其每个内点的某邻域中表示为体积泛函的极值函数的图像的形状 (即极小超曲面方程解的形状).

在三维空间中的二维极小曲面有相当简单的分析的刻画. 假设曲面 V^2 由径向量 r 给出, $r: D(u,v) \to \mathbb{R}^3, r = r(u,v)$, 其中的 D 是平面中的区域, 其

参照于笛卡儿坐标 (u, v). 容易验证, 如果 u 和 v 为曲面上的共形坐标 (即在曲面上的诱导黎曼度量有 $\lambda(u,v)(du^2+dv^2)$ 的形状), 则径向量是调和的, 也就是说, 它的坐标是调和函数 $\left(\text{相对于算子}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\text{而言}\right)$. 详细情形请参看 [1], 卷 I, §37. 一般来说, 相反的事实并不成立, 即被调和径向量盖满的曲面不必是极小的. 二维极小曲面的拓扑结构十分复杂, 特别, 虽然在任意逐段光滑围道上存在张在上面的极小曲面, 但对于给定的边界围道 (曲面边缘) 不存在极小曲面的唯一性定理, 除此之外, 极小膜还可能有奇点.

"**普拉托问题**", 这是一个综合了一堆问题的词条, 这些问题均与定义在 k 维曲面类上的 k 维体积泛函的极值流形和绝对极小的研究有关; 其中所说的这些 k 维曲面均嵌入在一个承载的黎曼流形之中, 并且满足各种各样的边界条件, 在这类变分问题的丰富演变史中自然地分出了几个期间, 它们的特征在于对同样的概念的不同处理, 诸如 "曲面" "边界" "极小" 等概念; 还在于对应于进行处理时得到极小解的方法. 从历史上看, 第一个解决的是对 $\mathbb{R}^3$ 中具边缘的二维曲面所提出的普拉托问题 (之后则是在 $\mathbb{R}^n$ 中的). 这个问题的参数化形式可如此阐述: 设 $r(u,v)$ 为曲面 $V^2\subset\mathbb{R}^n$ 的径向量, 即 $f: D\to\mathbb{R}^n$ (局部地) 给出一个二维区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 到空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个正则映射. 于是 $\mathrm{vol}_2 f(D)=\int_D\sqrt{EG-F^2}dudv$. 问题是: 是否可以找到曲面 $X_0^2=f_0(D)$ 及映射 f_0 使得它以所给围道 A 即嵌入在 $\mathbb{R}^n$ 中一组不自交的圆为边缘, 并使得这个所求曲面的面积比所有其他以同样围道为边缘的曲面 $X^2=f(D)$ 的面积更小? 除了这个在具所给边界的所有曲面类中求绝对极小的问题外, 还考虑在给出的同伦类中求极小的问题, 就是说, 在具固定边界的曲面类中求极小, 而这些曲面之间给出了相互同伦的映射. 在二维情形这些问题已经得到了肯定的解答 (例如, 参看 [1*], [2*] 的综述). 我们还留意到, 极小膜 $X_0^2=f_0(D)$ 可以有自交点和其他的奇点 (依赖于边界围道的构图). 关于这个二维问题和与其相关问题的文献数量巨大, 但因为我们的基本目的是对高维普拉托问题作一个综述, 所以我们让对 "二维主题" 感兴趣的读者参阅 [5*], [6*] 的综述.

为了进行高维问题的分析, 我们需要一些与黎曼流形的第二基本型有关的概念.

设 $f: M^k\to W^n$ 为光滑流形 M^k 到光滑定向的连通闭黎曼流形 W^n 的光滑嵌入. 以 $T(M)$ 表示流形 M 的切丛. 设 $T_m(M)$ 表示 M 在点 $m\in M$ 处的切平面. 以 $\langle x,y\rangle$ 记向量 $x,y\in T_m(M)$ 的内积, 这个内积是由黎曼度量在 W 上诱导的. 设 ∇ 为 $T(M)$ 上的对称黎曼联络, 它与该度量相容. 像通常那样, 以 $\nabla_X P$ 表示对任意张量场 P 沿 W 上的向量场 X 的相对于联络 ∇ 的共变导数. 如果 x 向量场 X 在点 m 的值 (即平面 $T_m(W)$ 中的一个向量), 则以 $\overline{\nabla}_x P$ 代表张量场 P 沿方向 x 的共变导数.

为简单起见, 仍以 M^k 表示子流形 $f(M^k) \subset W^n$, 于是由于在每点 $m \in M$ 定义了正交于平面 $T_m(M)$ 的平面 N_m^{n-k}, 故与切丛 $T(M)$ 同时也定义了法丛 $N(M)$. 嵌入 $M \to W$ 在 $T(M)$ 和 $N(M)$ 上产生了自然的黎曼联络. 设 Y 为在子流形 M 上的一个光滑向量场, $x \in T_m(M)$ 为一个任意切向量. 按定义, $\nabla_x Y = (\nabla_x Y)^T$, 其中右边的 ∇ 表示在承载流形 W 上给出的对称黎曼联络, 而 $(\cdot)^T$ 表示它到切平面 $T_m(M)$ 上的正交投影. 容易验证, 这个运算是 $T(M)$ 上的元挠的黎曼联络, 即是由嵌入 $M \to W$ 诱导的在 M 上的黎曼度量所唯一决定. 完全相同地在法丛上也定义了联络: 考虑丛 $N(M)$ 的任意光滑截影 V, 即在每点 $m \in M$ 给予一个法向量 $V(m) \in N_m(M)$. 我们得到了定义在子流形 M 上的一个光滑向量场 $\widetilde{V}$. 如果 $x \in T_m(M)$, 则令 $\nabla_x V = (\overline{\nabla}_x \widetilde{V})^N$, 其中 $(\cdot)^N$ 为到平面 $N_m(M)$ 的正交投影. 这个运算是 $N(M)$ 上的无挠黎曼联络. 转向构造 (具任意余维) 子流形 M 的第二基本型.

定义 1　设 $x \in T_m(M) v \in N_m(M). V$ 为流形 M 上任意一个包含了向量 v 的向量场, 使得 V 在点 $m \in M$ 的某个邻域中正交于 M. 以公式 $Q^v(x) = -(\overline{\nabla}_x V)^T$ 定义一个线性映射 $Q^v : T_m(M) \to T_m(M)$. 这个映射是对称的, 从而定义了一个双线性形式 $\{Q^v\}$, 称其为子流形 $M \subset W$ 的*第二基本型*.

事实上我们定义了形式 Q^v 的整个族 Q, 其中的向量 v 起作参数的作用: $Q = \{Q^v\}$. Q 是有明确定义的, 就是说不依赖于向量 v 在流形 W 上向量场 V 中被包含的方式, 并且光滑地依赖于它的变量. Q 也可以以等价的方式解释为在切空间 $T_m(M)$ 上的双线性对称形式, 其取值于法空间 $N_m(M)$. 事实上, 如果 $x, y \in T_m(M)$, 则可定义形式 $Q(x, y) \in N_m(M)$ 为 $\langle Q(x, y), v\rangle = \langle Q_x^v, y\rangle$. 我们把向量 y 包含在流形 W 的一个向量场 Y 中, 使其切于子流形 M. 于是有 $Q(x, y) = (\overline{\nabla}_x Y)^N$. 现在可以用形式 Q 来定义子流形 M 的平均曲率了.

定义 2　考虑在切空间 $T_m(M)$ 上定义的第二基本形式 Q. 因为在 $T_m(M)$ 上定义了内积, 故可以考虑形式 Q 的迹, 它是 (在每点 m)$N_m(M)$ 中的一个向量. 因此, 形式 Q 的迹是法丛 $N(M)$ 的一个光滑截影 H. 称这个截影为子流形 $M \subset W$ 嵌入的*平均曲率*.

如果 M 为流形 W 中的超曲面, 则得到一个纯量的平均曲率 $H = \mathrm{tr} R^{-1} Q$, 其中 R 和 Q 为第一和第二基本型所对应的矩阵.

定义 3　如果子流形 $M \subset W$ 的平均曲率 H 恒等于零 (即在流形的每个点上为零), 则称 M 为*局部极小*.

在子流形的平均曲率化零与体积泛函的一阶导数化零之间存在着紧密的联系. 设给出了光滑的同伦 $f_t : M \to W, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 使得每个映射 f_t 都是嵌入, 其

中 $f_0 = f$, 而 f 为原来的那个嵌入. 有时称这样的同伦为同痕变差. 有下面的已知命题.

命题 2 设 M 为 W 的紧子流形, $v_k(t) = \mathrm{vol}_k f_t M$. 子流形 M 为局部极小当且仅当 $\dfrac{dv_k(0)}{dt} = 0$ 对流形 M 所有的保持边缘 ∂M 不变的同痕变差中成立.

那么, 平均曲率为零的子流形便是体积泛函的极值流形."局部极小" 这个词的意思是说, 当给予在径向和横向的无穷小变差时, 子流形的体积 "在一阶逼近中不变"(即它的一阶导数为零). 如果是个有限大小的变差, 则体积会变小的. 例如, 对于一个标准球面的赤道就发生这种情形, 当然它是局部极小 (它甚至是全测地子流形), 但它在球面上可收缩为一点, 从而不是整体极小子流形. 我们记得, 任意全测地子流形是局部极小, 这是因为这时第二基本型恒等于零. 由于要考虑 "大变差" 条件, 整体极小性的概念自身是非平凡的. 我们在这里给出这类 "大变差" 定义中的一个.

定义 4 设 $M^k \subset W^n$ 为紧的定向闭子流形. 如果给出了 $(k+1)$ 维紧闭的光滑定向子流形 $Z^{k+1} \subset W^n$ 使得边缘 $\partial Z = M \bigcup (-P)$, 其中 $(-P)$ 是个具反定向的子形, 则称其为 M 的一个 (下) **配边形变**, 这时称流形 P^k 为流形 M^k 的 (下) **配边变差**. 在非紧子流形的情形 $M \subset W$, 如果在 W 中定义了一个子流形 P^k, 其与 M 在某个紧区域之外相等, 并且有一个 $(k+1)$ 维子流形 Z, 满足 $\partial Z \subset M \bigcup (-P)$, 其中 ∂Z 为逐段光滑的边缘, 则说给了 M 一个下配边形变.

在 [1], 卷 I, §37 中, 我们介绍了整体极小曲面的例子, 它是个在凯勒 (Kähler) 流形中的复子流形.

II. 高维变分问题与配边论

考虑在定义了某种拓扑型的曲面类中求绝对和相对极值曲面的经典问题. 在流形 M^n 中指定一个 $(k-1)$ 维的光滑紧闭子流形 A^{k-1}, 为了以后使用方便, 称其为 "围道". 我们考虑所有可能的形如 (W, f) 的偶对, 其中 W 为光滑的 k 维紧子流形, 其边缘 ∂W 同胚于围道 A, 而 $f: W \to M$ 为连续 (或函段光滑) 的映射, 在边缘 ∂W 上相互恒等.

问题 1 设 (W, f) 为这样的偶对, 其中 W 为所有以 A 为边缘的流形, $f: W \to M$ 为 W 到 M 中的映射, 在边缘 A 上相同. 是否能在这些 (W, f) 中找出一个 (W_0, f_0), 使得映射 f_0, 或者流形 W_0 在 M 中的像的膜 $X_0 = f_0(W_0)$ 具有某种合理的极小性质? 特别, 它应该满足不等式 $\mathrm{vol}_k X_0 \leqslant \mathrm{vol}_k X$, 其中 $X = f(W)$ 为上面所提及的那些类的任一个膜, 而 vol_k 或者是黎曼体积或者是标准的豪斯多夫测度.

按照 “合理的极小性”, 在流形 M 中的膜 $X_0 = f_0(W_0)$ 除了满足不等式 $\mathrm{vol}X_0 \leqslant \mathrm{vol}X$ 外, 还应理解为存在一个在 X_0 中无处稠密的奇点的子集 Z, 使得在每个非奇点 $P \in X_0\backslash Z$ 有一个 M 中的邻域 U, 其交 $(X_0\backslash Z)\bigcap U$ 由维数不超过 k 的光滑子流形构成, 其中每个 V_α 都是在经典微分几何意义下的极小子流形, 即它们的平均曲率为零.

问题 2　设 (V,g)为这样的偶对, 其中 $V = V^k$ 为紧的定向闭 k 维流形, $g: V \to M$, 为它到流形 M^n 的连续 (或逐段光滑) 映射, 而 $X = g(V)$ 为 V 在 M 中的像. 如果存在 (V',g') 以及紧子流形 Z, 有 $\partial Z = V\bigcup(-V')$ 和一个连续映射 $F: Z \to M$ 使得 $F|_V = g, F|_{V'} = g'$, 则称 (V',g') 为 (V,g) 的一个配边变差, 是否在上面提到的这些形状的偶对 (V,g) 中找到一个 (V_0,g_0) 使得 $X_0 = g_0(V_0)$ 具有合理的极小性, 特别, 它能满足不等式 $\mathrm{vol}_k X_0 \leqslant \mathrm{vol}_k X, X = g(V)$ 为所给出的那个类中得到的膜 (曲面)?

问题 2 提出了关于在已知偶对 (V,g) 的所有配边变差的类中求体积泛函的绝对极小问题.

与这两个求体积泛函的绝对极小问题一起的自然是要规定出两个关于求相对极小的问题.

问题 1′　设 (W,f) 为那种偶对, 其中 W 为有某个固定的 (!) 边缘为 A 的流形, 而 $f: W \to W$ 为所有连续 (或逐段光滑) 的映射, 它同伦于某个固定的映射 f', 并且在边缘 A 上不动 (即等于固定的同胚边缘); 能否找出那样的 (W,f_0) 使得映射 f_0 或膜 $X_0 = f_0(W)$ 作为 W 在 M 中的像, 具有极小性, 即有 $\mathrm{vol}_k X_0 \leqslant \mathrm{vol}_k X, X = f(W)$ 为由所给同伦类中得出的任意膜?

这是一个关于在单独一个同伦类中求体积泛函的极小问题, 就是说, 是个求相对极小的问题, 不同于前面求绝对极小的问题, 那是在全部的同伦类中求极小的.

问题 2′　设 $g: V^k \to M^n$ 同伦于某个原来给出的映射 $f: V^k \to M^n$, 其中 V^k 为一个固定的闭流形; 能否找到一个映射 g_0, 它具有极小性, 即使得满足 $\mathrm{vol}_k g_0(V) \leqslant \mathrm{vol}_k g(V)$?

我们开始描述求绝对极小问题的结果. 为简洁起见, 我们称问题 1 和 1′ 为 “围道粘合” 问题, 而问题 2 和 2′ 为 (闭链) 实现问题. 这种类型的极小曲面 (如果存在) 则称之为整体极小. 在下面将介绍它们的存在性定理.

我们现在要描述在极小化高维体积泛函时, 小维数的不可去掉的分层现象的影响. 这个影响在二维体积泛函 vol_2 的极小化过程中没有什么作用, 但在较高维情形它却起了重要的作用. 在图 120 中展示出围道 A 以及膜 $X_t = f_t(W)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中逐渐取得对应于极小面积的那个位置的情形. 显然, 在某个时刻会发生膜的 (粘合)“坍缩”, 这时在图中薄的管状 T 的位置出现了线段 S. 在二维时容易对此情形进行补救, 这只要连续地把它映成一个张在所给围道上的二维圆盘

即可. 重要的是, 这时我们没有损害到膜的参数化: 所得到的膜像从前一样是某个带边二维流形的像.

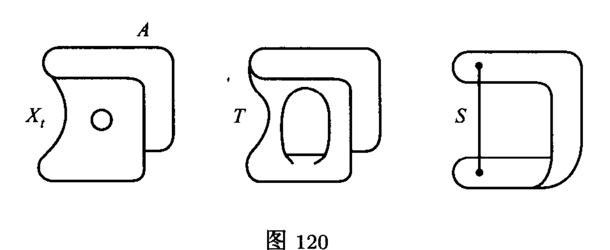


图 120

可以清楚看出, 在 $k>2$ 的高维情形出现上面所描述的类似情形时, 将使极小化问题极其复杂化. 当进行形变的膜 $X_t=f_t(W)$ 的 k 维体积趋向极小时, 在这个膜中开始出现了粘合, 就是说, 与原来映射 $f=f_0$ 同伦的映射 f_1 已不必再是个嵌入或浸没, 而且甚至其像在 W 的某个开子集中的维数也降低了. 这造成了在像 $X_1=f_1(W)$ 中出现维数 s 的片段 (或分层) S, 其中 $s\leqslant k-1$, 与二维的情形不同, 这种 "低维分层" 一般来说, 既不能清除也不能连续地变到膜 X 的 "大块" (即 k 维部分) $X^{(k)}$ 里去, 这是因为在这些运算下可能会损失掉膜的基本性质, 即它是某个以 A 为边缘的光滑流形 $\widetilde{W}$ 的连续像. 因为我们的目的是在形如 $X=f(W)$ 的膜中求出极小的那一个, 就是说, 允许用流形 W 的连续参数化, 那么在任意消灭 " 低维分层" 的形变中, 我们应该要确保经这种扰动后得到的膜 $\widetilde{X}$ 仍能像之前那样地参数化 (可能是用其他的流形). 但正如简单的例子所表明的, 既不能舍去低维分层, 也不能将其变到膜 X 的大块 $X^{(k)}$ 中去 (利用定义在整个膜上的某个连续映射) 而又能使得在一般情形中保持允许连续参数化的膜性质不变. 或许可以忽略去低维分层而只集中考虑泛函 vol_k 来简化整个问题, 这个观点就是说所有的低维分层都不存在 (即它们的 k 维测度为零). 但是像实际表明的 (参看 [7*]—[9*] 的细节), 甚至在这个简化了的情形, 求极小也要求得到关于低维分层行为的广泛信息, 以确保膜的参数化.

我们以通常同调语来描述普拉托问题的提法. 由于上面所提到的极小化高维膜的那些困难, 有必要重新制定一个新的更粗略的语言, 以消除低维分层的影响. 在一系列的研究中已迈出了必要的一步, 可参看 [1*]—[4*] 中的综述. 设 $H_{k-1}(A)$ 表示 (系数在群 G 的) A 的 $(k-1)$ 维谱同调群, 其中 A 为黎曼流形 M 中的围道, 是一个闭的 $(k-1)$ 维流形. 设 $A\subset X\subset M, X$ 为 M 中任意一个 k 维曲面. 在下文中我们总是把 "曲面" 看作是在黎曼流形中的 (豪斯多夫) 可测紧集. 设 $\{X\}$ 为所有这类曲面 X 的集合, 使由嵌入 $i:A\to X$ 诱导的同态 $i_*:H_{k-1}(A)\to H_{k-1}(X)$ 把整个同调群 $H_{k-1}(A)$ 化为零. 令 $\lambda_k=\inf\limits_{X\in\{X\}}\mathrm{vol}_k X$, 其中 $\mathrm{vol}_k X$ 像前面那样表示 k 维豪斯多夫测度, 或者 (如果有定义) 可以是黎曼体积. 于是发现 (例如参看 [1*]—[4*]), 总存在 (在

前面所提的意义下的) 极小曲面, 也就是说, 总存在 k 维紧集 $X_0 \in \{X\}$ 使得 $\mathrm{vol}_k X_0 = \lambda_k$. 在这种处理方式的框架内分出了两个方向: 更偏于几何的 (参看 [2*], [3*]) 和更偏于泛函的 (参看 [1*], [4*]). 在通常的同调类中的绝对极小解的存在性定理方面, 已经证明了显著的结果; 在几乎处处正则局部解的方面也是如此 (Federe, Fleming, Almgren, Reifenberg, 等等).

在这种处理方式下所用到情形是: 如果 $X \supset Y = \overline{Y}$, 其中 $\dim \overline{X \backslash Y} < k$, 则 $H_k(X) = H_k(Y), \mathrm{vol}_k X = \mathrm{vol}_k Y$. 这意味不会出现不可消去的低维分层的问题, 它们不管是在拓扑的观点下还是在度量的观点下都不存在. 但是这种用通常的同调群来定义诸如 "边缘" 和 "张在围道上" 这些概念会使我们背离了原先所给出的经典描述, 这是因为, 如果围道 A 是 M 中 $(k-1)$ 维子流形, X_0 为极小曲面, 它同调地张在围道 A 上, 则一般来说, 不存在以 A 为边缘的子流形 M 使得曲面 X_0 的形状为 $X_0 = f(W)$. 换句话说, 曲面 X_0 可能不会具有流形的连续参数化. 详情见 [7*]—[9*].

现在回到经典意义下的普拉托问题, 它是在以参数化流形给出的膜曲面类中求极小解. 我们来研究在所有维数上这种膜的行为而不仅仅在最高维数上. 为了实现这个思路需要有比普通同调术语更加灵活的语言. 为此我们给出在建立这种语言要用到的一些定义. 设 $Y \supset Z$ 为一对拓扑紧空间.

定义 5 设有 (V^{k-1}, f), 其中 V^{k-1} 为紧定向流形, 边缘为 ∂V, 而 f 为连续映射 $f : (V, \partial V) \to (Y, Z)$, 即 $f(V) \subset Y, f(\partial V) \subset Z$; 我们称 (V^{k-1}, f) 为 (Y, Z) 的一个*定向* $(k-1)$ *维奇异流形*. 如果 $Z = \varnothing$, 则假定 $\partial V = \varnothing$. 称奇异流形 (V, f) 配边于零 (等价于零) 的, 是说, 如果存在紧定向流形 W^k 以及连续映射 $F : W \to Y$ 使得 a) 流形 V 是边缘 ∂W 的正则子流形, b) V 的定向与 W 在它上面诱导的定向相同, 另外 $F|_V = f, F(\partial W \backslash V) \subset Z$.

流形的不交并的运算诱导了奇异流形间的不交并运算, 两个奇异流形 (V_1, f_1) 和 (V_2, f_2) 称做配边的, 是指它们的不交并 $(V_1 \bigcup V_2, f_1 \bigcup f_2)$ 配边于零.

流形偶 (Y, Z) 的 $(k-1)$ 维奇异定向流形的配边类集合构成一个阿贝尔群 $\Omega_{k-1}(Y, Z)$. 如果在相似结构中只去掉了定向条件则得到了非定向配边群 $N_{k-1}(Y, Z)$. 上面所叙述的问题 1 和 2 现在可重新叙述. 设 A^{k-1} 为 M 中的紧闭定向子流形, $i : A \to X$ 为嵌入, 其中 X 为 M 中的曲面.

问题 1 能否在那些包含 A 的曲面 X 中找出一个曲面 X_0 使其具有极小性, 其中的奇异配边 (A, i) 在 X 中等价于零?

恒同映射 $e : A \to A$ 定义了元素 $\sigma \in \Omega_{k-1}(A)$. 显然, 上面所引进的曲面 X 的类由 $i_*\sigma = 0$ 给出了特征刻画, 其中的 $i_* : \Omega_{k-1}(A) \to \Omega_{k-1}(X)$ 为嵌入 $i : A \to X$ 所诱导的同态.

问题 2 能否在所有配边于 (等价于) 已给奇异流形 $(V', g'), g': V' \to M$ 的奇异流形 $(V, g), g: V \to M$ 中, 找出那样的奇异流形 (V_0, g_0), 使得 $X_0 = g_0(V_0)$ 具有极小性?

与群 Ω_{k-1} 和 N_{k-1} 一起的我们还要用到群 Ω_{k-1}^p, 它是模 p 的奇异配边群. 群 $\Omega_*, N_*, \Omega_*^p$ 满足斯廷罗德 – 艾伦伯格七条公理中的六条, 即所谓广义同调论. 但是与普通同调论不同, 一般地, 配边群在正维数时不为零. 因为单点的普通同调群在正维时均为零, 故这是与普通同调论的本质性差异.

因为极小曲面一般来说具有奇点 (并且这些奇点可能会极其复杂), 所以在变分问题中使用配边理论时要扩大这个理论的定义域: 从胞腔复形类拓展到曲面类 (即在黎曼流形中的可测紧集). 这个过程类似于在普通同调类的情形中构造谱同调.

在后文中说到曲面的配边时我们总要记住是指的 "谱配边". 因为群 N_* 和 Ω_*^p 是紧群 (在有限胞腔复形的情形), 所以把它们拓展到曲面的类不会有障碍. 对于配边 Ω_* 需要更加谨慎处理, 即应该考虑群 $p\Omega_* = \Omega_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p$, 其中 $\mathbb{Q}_p$ 是 p–进位整数群. 详细情形可参看 [11*].

III. 整体极小曲面的存在定理的陈述, 其中的极小曲面是高维体积泛函的绝对极小解

设 M 为紧的光滑闭黎曼流形, h 为上面所列举的各种配边论中的一个, A 为一个固定的曲面, 即在这些理论中的围道. 考虑流形 M 中曲面 X 的类, 它是定义在上面问题 1 和 2 中的那种. 称这个类为变差, 以 B 表示. 在问题 1 的情形, 类 B 中的曲面在配边的意义下张在围道 A 上, 而在问题 2 的情形, 类 B 中的曲面实现为流形 M 的配边群的某个非平凡元. 于是在每个这种变分类中都提出了求极小曲面的问题. 对于类 B 中每个曲面 X, 我们构造它的*分层结构* $X = A \bigcup S^k \bigcup S^{k-1} \bigcup \cdots$, 其中 S^k 是在 $X \backslash A$ 中在其每一点具维数 k 的最大子集; 然后 S^{k-1} 为 $X \backslash A \backslash S^k$ 中在其每点具维数 $k-1$ 的最大子集, 等等 (参看 [7*], [8*], [11*]). 我们称子集 S^i 为一个分层. 如果它们均可测, 则定义了分层的体积 $SV(X) = (\mathrm{vol}_k S^k, \mathrm{vol}_{k-1} S^{k-1}, \cdots)$, 表示为具 k 个坐标的向量. 让曲面 X 在所容许的变差类中变化, 即一直保持在变差类 B 中, 我们便使得曲面的分层体积也在变化. 问题现在归结为在所给类 B 中求具最小分层体积的曲面. 我们所理解的最小体积向量 $SV_B = (d_k, d_{k-1}, \cdots)$ 是按照下面字典式排列的意义的, 先选取 $SV(X)$ 的第一个坐标的极小, 即找出曲面 X_k, 它满足不等式

$$\mathrm{vol}_k S^k = \mathrm{vol}_k(X \backslash A) = d_k = \inf_{Y \in B} \mathrm{vol}_k(Y \backslash A).$$

如果这样的 X_k 存在, 则进行体积向量 $SV(X)$ 的第二个坐标的极小化. 为此要在已经具有极小的第一个坐标的曲面 X_k 的类 (即 $\mathrm{vol}_k(X \setminus A) = d_k$) 中找出曲

面 X_{k-1}, 使得

$$\mathrm{vol}_{k-1}X_{k-1}\backslash A \setminus S^k = d_{k-1} = \inf_{\{X_k\}} \mathrm{vol}_{k-1}X_k\backslash A\backslash S^k.$$

如此继续下去. 在每次极小化下一个分层体积坐标时, 前面的所有坐标已经被极小化了, 并已固定. 如果这个过程有明确定义 (即已建立了存在性定理, 见后面), 则最后到达了某个曲面, 它的分层体积在所给变差类 B 中的所有分层曲面类中已是整体极小. 数 $d_i = d_i(B)$ 自然依赖于类 B. 以配边理论的语言来提问和解决普拉托问题的关键是由本文作者引进的分层体积概念的应用, 以及发展了在各个维数上进行极小化方法 (参看 [7*]—[9*], [11*]). 特别, 这个思想的进一步发展, 使得在后来证明了在所有同伦类中整体极小曲面的存在性.(见 [12*])

定理 1 (基本定理, 参看 **[7*]—[9*], [11*])** .
设 M^n 为紧闭光滑流形, 满足 $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$, 其中 $\pi_i(M)$ 为 M 的同伦群, 又 $A \subset M$ 为一个固定的围道, 是个曲面. 考虑任意一个非空的变差类 B, 它是以前面给出的配边来定义的. 于是在类 B 中总存在光滑的极小曲面 X_0, 即它的分层体积 $SV(X_0) = (d_k, d_{k-1}, \cdots) = SV_B$ 为极小. 这个曲面有唯一定义的分层结构 (即被分成了各个层)$X_0 = A \bigcup S^k \bigcup S^{k-1} \bigcup \cdots$, 其中每个子集 S^i, 除了可能存在的 i 维测度为零的奇点集合外, 是流形 M 中的一个光滑的极小 i 维子集 (即平均曲率为零). 于是 $d_i = \mathrm{vol}_i S^i$.

推论 1 设定理 1 的假设成立, 并设 B 为问题 1 和 2 中的变差类 (见前面的内容). 于是在这个类中存在光滑的极小曲面 (可能具有奇点, 但在每个分层中它们构成的子集的测度为 0), 它是普拉托问题的解: a) 在问题 1 的情形, 这个曲面是在所有按配边意义下张在围道 A 上的所有曲面中的极小, 也就是说, 这时使用了边缘为 A 的流形的连续参数化; b) 在问题 2 的情形, 这个曲面是在所有实现为该承载流形的配边群中所给元素的曲面中的极小.

这些结果实际上是一个更一般的光滑极小曲面的存在性定理的推论, 这个一般性定理在 [7*], [8*], [11*] 中有证明, 在那里是所谓的广义 (非常)(上) 同调理论的情形. 因为对广义同调论的描述需要用到许多补充材料, 我们在这里不再关注它了. 我们只介绍一个高维变分问题的例子, 它是以广义上同调的语言阐述的.

设在流形 M 上给出了稳定非平凡的向量丛 ξ. 考虑所有那样的曲面 $X \subset M$ 构成的变差类, 使得 ξ 在 X 上的限制仍然是稳定非平凡的. 于是在这样的曲面中一定存在整体极小的曲面 (在分层体积的意义下).

在前面我们分别考虑了两种情形: 张在围道上和闭链的实现. 但是最自然还是一种混合的问题: 寻找这样的极小曲面, 它既张满围道也在承载流形中实现为某个闭链. 我们简要地描述这个*混合普拉托问题*的解.

设 h 为某个配边理论 (见上文), 并设 $L = \{L_p\}$ 为一组固定的子群 $L_p \subset h_p(A)$, 其中 p 为整数. 又设 $L' = \{L'_q\}$ 为另一组子群 $L'_q \subset h_q(M)$.

定义 6 以 $B(A, L, L')$ 代表流形 M 中所有那样的曲面 X 的类, 使得 1)$A \subset X \subset M$,2) $L \subset \mathrm{Ker} i_*$,3)$L' \subset \mathrm{Im} j_*$, 其中 $i: A \to X, j: X \to M$ 为嵌入映射.

可以清楚看出, 类 $B(\varnothing, 0, L')$ 和类 $B(A, L, 0)$ 各自与前面在问题 1 和 2 中引进的变差类 B 相同. 实际上, 在每个类 $B(A, L, L')$ 中总存在整体极小曲面, 使它的分层体积在字典排列式的意义下最小.

由于这个定理 (参看 [7*], [8*], [11*]) 建立了极小化分层体积的曲面的存在性, 这里所说的分层体积是由曲面各分层的体积组成的序列; 于是我们以关于这些分层的一系列断言来叙述这个结果.

设定理 1 中的假设成立, 并设 $B(A, L, L') = B$ 为任意一个非空的变差类, 它由具某种给定拓扑型的曲面组成. 设 k 为那些数 $s < n$ 中最小的数, 它使得 $d_s = d_s(B) < \infty, 3 \leqslant k \leqslant n$. 于是成立下面的一系列命题:

1) 存在曲面, 其最高次体积 (即体积 vol_k) 为整体极小. 更准确地说, 如果 $\{X_k\}$ 为所有那样的曲面 X 的类, 使得 $X \in B$, 且 $\mathrm{vol}_k(X \backslash A) = d_k = \inf\limits_{Y \in B} \mathrm{vol}_k(Y \backslash A)$, 于是我们断言, 这个类非空且 $d_k < \infty$. 这种情形下, 当 $d_k > 0$ 时, 每个变差类 $\{X_k\}$ 中的曲面 X 包含了唯一确定的 k 维 (即在它的每个点上有维数 k) 子集 $S^k \subset X \backslash A$, 它使得 $A \bigcup S^k$ 是承载流形中的紧集. 这时, 曲面 X 的 k 维分层即集合 S^k 包含了一个子集 Z_k (可能为空), 满足 $\mathrm{vol}_k Z_k = 0$, 并且 $S^k \backslash Z_k$ 为 M 中的光滑 k 维子流形. 集合 Z_k 是曲面 X 中所有 k 维奇点的集合. 于是 $\mathrm{vol}_k S^k = \mathrm{vol}(X \backslash A) = d_k$. 如果 $d_k = 0$, 则令 $S^k = \varnothing$. 这时的曲面没有 k 维的分层.

2) 存在曲面, 其不但在最高次体积下为整体极小, 而且随其维数减少的情形也如此. 这个随后的体积是对相应维数的分层进行计算的而这里的分层是包含在该曲面之中的. 更准确地说, 如果 $\{X_{k-1}\} \subset \{X_k\}$ 为所有那些 X 的类, 其中 $X \in B$, 且满足 $\mathrm{vol}(X \backslash A) = d_k$, 即 $X \in \{X_k\}$, 并且除此之外还有

$$\mathrm{vol}_{k-1}(X \backslash A \backslash S^k) = d_{k-1} = \inf_{Y \in \{X_k\}} \mathrm{vol}_{k-1}(Y \backslash A \backslash S^k),$$

于是我们断言, 类 $\{X_{k-1}\}$ 非空, 且 $d_{k-1} < \infty$. 此时, 当 $d_{k-1} > 0$, 这个类中的每个曲面包含了一个唯一确定的 $(k-1)$ 维的子集 $S^{k-1} \subset X \backslash A \backslash S^k$, 使得 $A \bigcup S^k \bigcup S^{k-1}$ 在承载流形中为紧. 集合 S^{k-1} 包含了子集 Z_{k-1} (可能为空集), 其测度为零, 即 $\mathrm{vol}_{k-1} Z_{k-1} = 0$, 并且 Z_{k-1} 在 S^{k-1} 中的补集, 即子集合 $S^{k-1} \backslash Z_{k-1}$ 为承载流形中的光滑的 $(k-1)$ 维子流形, 它没有边缘且在 S^{k-1} 中处处稠密. 其中满足不等式 $\mathrm{vol}_{k-1} S^{k-1} = \mathrm{vol}_{k-1}(X \backslash A \backslash S^k) = d_{k-1} > 0$. 如果 $d_{k-1} = 0$, 则令 $S^{k-1} = \varnothing$.

如此对维数向下继续进行. 在随后的一步中, 存在的曲面, 不仅它的前两个体积极小 (即最高和随后向下的一个), 而且对维数为 $k-2$ 的第三个体积也要极小, 它是对相应于 $(k-2)$ 维分层进行计算的. 换句话说, 每个后续的体积是在固定所有前面的极小体积的条件下为极小. 最后, 由类 $\{X_1\}$ 组成的曲面已经是在所有维数上的整体极小, 就是说, 所有它的分层的体积极小. 进一步说, 每个分层 S^i 除去可能有的测度为 0 的奇点集外, 都的确是 i 维的光滑极小子流形.

最后我们说一下在每个同伦类中整体极小曲面的存在定理. 分层体积新概念的引进和在 [7*], [8*], [11*] 中发展出的极小化的方法, 使得之后解决了在每个曲面的变差类中的普拉托问题, 这里所说的是指某个固定映射 $f: V \to M$ 的同伦所得到的曲面的类. 原来, 在每个这样的类中都有整体的极小曲面 (见 [12*]). 这里, 分层曲面和分层体积的概念可以在 "簇" (Uarifold) 的泛函的构架上实现, 在它的术语下得到了几乎处处正则的极小解的存在定理. 因此, 目前已经建立了的不仅仅是绝对极小解的存在性, 而且还有相对极小 (在每个同伦类中).

应用 2 的参考文献

1*. *Federer H.* Geometric measure theory. Berlin: Sprinder, 1969

2*. *Morrey Ch B.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin: Sprinder, 1966

3*. *Reinfenberg E R.* Solution of the Plateau problem, for mdimensional surfaces of varying topological type// Acta Math., 1960, 104, No1, p.1—92

4*. *Almgren F J.* Existence and regularity almost every where of solutions to elliptic variational problem among surfaces of varying topological and singularity structure // Ann. Math., Ser. 2, 1968, 87, No2, p.321—391

5*. *Оссерман Р.* Минимальные поверхности // УМН, 1967, 22, No4

6*. *Osserman R.* Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n // Ann. Math., 1964, 80,No2, p.340—364

7*. *Фоменко А Т.* Многомерная задача Плато в римановых многообразиях // Матем. сб., 1972, 89(131), No3, с.475—520

8*. *Фоменко А Т.* Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райфенберга // ИАН СССР, 1972, 36, No5, с.1049—1080

9*. *Фоменко А Т.* Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей // УМН, 1981, 36, No6, с.105—135

10* *Фоменко А Т.* Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле // ИАН СССР, 1971, 35, №3, с.667—681

11* *Фоменко А Т.* Многомерные задачи Плато на римановых многообразиях и экстраординарные теории гомологий и когомологий. Часть I.– В кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, 17. М.: Издво МГУ, 1974, с.3—176; Часть II. –В кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, 18. М.: Издво МГУ, 1978, с.4—93

12* *Дао Чонг Тхи.* Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато // ИАН СССР, 1980, № 5, с.1031—1065

13* *Фоменко А Т.* О минимальных объемах топологических глобально минимальных поверхностей в кобордизмах // ИАН СССР, 1981, 45. №1, с.187—212

索　引

M

N

O

P

Q

本书是莫斯科大学数学力学系对几何课程现代化改革的成果，作者之一的诺维可夫是1970年菲尔兹奖和2005年沃尔夫奖得主。全书力求以直观的和物理的视角阐述，是一本难得的现代几何方面的好书。内容包括张量分析、曲线和曲面几何、一维和高维变分法（第一卷），微分流形的拓扑和几何（第二卷），以及同调与上同调理论（第三卷）。

本书可用作数学和理论物理专业高年级和研究生的教学用书，对从事几何和拓扑研究的工作者也极有参考价值。


ISBN 978-7-04-021434-5
9 787040 214345 >
定价 45.80 元